فهرست مطالب

درست‌نامه

صفحه	سطر	غلط	درست
۱۳	۱۱	$2y'$	$2yy'$
۶۸	۱۵	$Q(x,y)=0$	$Q(x,y)dy=0$
۱۱۴	۳	$-(\frac{y-C}{x}+$	$-(\frac{y-C}{x})^3+$
۱۳۰	۸	$=x(1-x^3p)\frac{dp}{dx}$	$=x(1-x^3p^2)\frac{dp}{dx}$
۱۶۸	۹	$y''+2y'-15y=0$	$y''-2y'-15y=0$
۱۶۸	۱۲	$t^2+2t-15=0$	$t^2-2t-15=0$
۱۶۸	۱۹	$t^2-t-6y=0$	$t^2-t-6=0$
۱۸۳	۱۷	$t_2=2-i$	$t_3=2-i$
۱۹۷	۱۸	$A=\frac{1}{10}$	$A=-\frac{1}{10}$
۲۰۶	۲۶	$y'(0)=0$	$y'(0)=1$
۲۰۷	۱	$y'(0)=2$	$y'(0)=0$
۲۱۰	۲۳	x^1	x^{-1}
۲۲۲	۲۲		$(D-1)(D-2)y=\sin e^{-x}(2)$
۲۵۵	۷	$p\pm ip$	$p\pm iq$
۲۸۵	۱۳	$(x_0-R\ ,\ x_0-R)$	$(x_0-R\ ,\ x_0+R)$
۳۰۲	۷	$-\frac{x^7}{7}$	$-\frac{x^8}{7}$
۳۰۷	۷	(3)	(2)
۳۰۸	۱۵	2^n	2^ν
۳۳۱	۴	$C_m x^{m+r+2}$	$C_m x^{m+r+2}$
۳۵۹	۱۶	$r_2=v$	$r_2=-v$
۳۸۳	۱۶	$z=\sqrt{3x}$	$z=\sqrt{3}x$
۴۵۰	۱۰	$t\int_0^t \frac{1-\cos t}{t}dt$	$t\int_0^t e^{3t}\frac{1-\cos t}{t}dt$
۴۸۸	۹	$c^2x^2-cy+1=0$	$y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$
۴۸۹	۱۰	$=p^2-\frac{c}{\sqrt{p}}$	$=p^2-c\sqrt{p}$
۴۹۱	۶	$(y-x)^6$	$(y-x)^5$
۴۹۳	۱۰		$y=-\frac{1}{4x^2}$
۴۹۶	۲	$(-\frac{\pi^2}{2}+$	$(-\pi^2+$
۵۰۰	۱۴	$\frac{\sin x}{x}$	$c_2\frac{\sin x}{x}$

فصل اول

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱ـ۱. تعاریف و کلیات

تعریف ۱.۱. هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به‌متغیر مستقل را یک *معادلهٔ دیفرانسیل* می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل به‌دو دسته تقسیم می‌شوند: اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل را *معمولی* نامیده و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد، آن را معادلهٔ دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با *مشتقات جزیی* می‌نامند.

مثال ۱.۱.

$$y' = 3 \qquad (۱)$$

$$y'' + 3(y')^2 + \cos x = 4 \qquad (۲)$$

$$x^2 y'''(y'')^{4/5} + e^{4x} \sin y' = y^3 + x(y')^6 \qquad (۳)$$

$$(y'')^3 + x(y')^{4/3} + y \sin y' = 7x^2 + 1 \qquad (۴)$$

$$(y'')^3 + 6(y')^4 + 2x = 3 \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} \qquad (۶)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\, \partial t} = 4x^2 t \qquad (۷)$$

شمارهٔ (۱) الی (۵)، معمولی و شمارهٔ (۶) و (۷) نسبی هستند. در این کتاب دربارهٔ حل معادلات دیفرانسیل معمولی که به‌اختصار آن را معادلهٔ دیفرانسیل می‌گوییم، بحث خواهد شد. در رابطه با اهمیت فراگیری این علم، خاطرنشان می‌سازیم که هر **پدیده فیزیکی وقتی با علایم ریاضی بیان شود، نتیجه، یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.**

مثال ۲.۱. معادله حرکت یک جسم

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

مثال ۳.۱. می‌دانیم که میزان تجزیه یک ماده رادیو اکتیویته متناسب با جرم موجود می‌باشد. اگر جرم جسم را y فرض کنیم آنگاه جرم، تابع زمان خواهد بود. وقتی بخواهیم قانون تجربی فوق را با علایم ریاضی بیان کنیم، داریم

$$\frac{dy}{dt} \alpha y$$

و چون جرم کاهش می‌یابد، می‌توان ضریب تناسب را $k-$ اختیار نمود.

$$\frac{dy}{dt} = -ky.$$

در این کتاب در مورد چگونگی تشکیل معادلات بحث نخواهیم کرد و فقط طریق حل ارائه خواهد شد. و برای این منظور باید معادلات را دسته‌بندی نموده و راه حل هر دسته را ارائه دهیم؛ و این‌کار بوسیله تعاریف زیر تحقق می‌یابد:

تعریف ۲.۱. بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادلهٔ دیفرانسیل را، مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم.

مثال ۴.۱. در مثال ۱.۱. معادلهٔ (۱) از مرتبهٔ اول، معادله (۲) از مرتبه دوم، معادله (۳) از مرتبه سوم، معادله (۴) از مرتبه دوم و معادله (۵) از مرتبه دوم می ـ

باشند.

تعریف ۳.۱. اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان نسبت به‌مشتقات موجود در معادله به‌فرم چند جمله‌ای نوشت، آنگاه توان بالاترین مشتق موجود در معادله را درجه‌معادلهٔ دیفرانسیل گوییم.

مثال ۵.۱. در مثال ۱.۱. معادلهٔ (۱) از درجه اول، معادلهٔ (۲) از درجه اول، معادلهٔ (۳) بدون درجه، معادلهٔ (۴) بدون درجه و معادله (۵) از درجه سوم می‌باشند. با استفاده از تعاریف بالا معادلات را دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

ب) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

پ) معادلات دیفرانسیل از مرتبه دلخواه n

در فصل دوم دربارهٔ حل معادلات مرتبه اول بحث خواهد شد. در فصل سوم، حل معادلات مرتبه دوم و مرتبه دلخواه n و در فصل چهارم حل معادلات مرتبه دوم با ضرایب متغیر ـ با استفاده از روش سریهای توانی و سری توسعه‌یافته سری توانی ـ به بحث گذارده خواهد شد. و در فصل پنجم مختصری دربارهٔ حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل و در فصل ششم روش تبدیل لاپلاس بیان‌خواهد گردید.

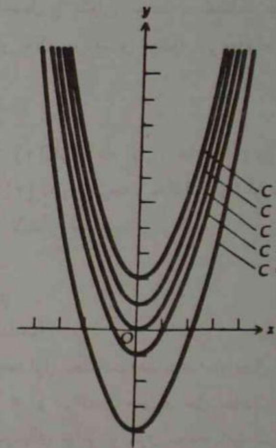
۲.۱. تشکیل معادله دیفرانسیل

دسته منحنی $y=F(x,c)$ را بررسی می‌کنیم. (c مقدار ثابت). به‌ازای مقادیر مختلفی که c اختیار می‌کند، منحنی‌های بیشماری رسم خواهد شد.

مثال ۶.۱. دسته منحنی

$$y = x^2 + c$$

را رسم کنید.

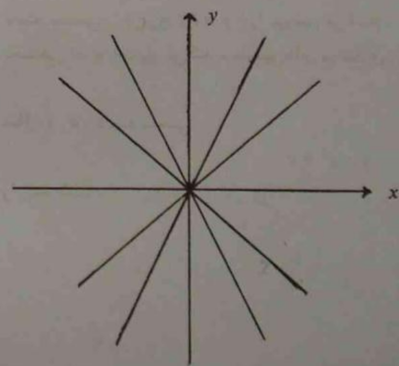


شکل ۱.۱

مثال ۱.۷. دسته منحنی

$$y=cx$$

را رسم کنید.

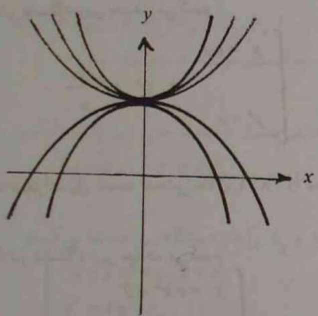


شکل ۱.۲

مثال ۱.۸. دسته منحنی

$$y=cx^2+2$$

را رسم کنید.



شکل ۱.۳

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که پارامتر ثابت c را نداشته و $y=F(x,c)$ جواب آن معادله باشد. این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خواهد بود. برای این منظور باید پارامتر c را در دستگاه زیر حذف کرد:

$$\begin{cases} y=F(x,c) \\ y'=F'_x(x,c) \end{cases}$$

مثال ۱.۹. معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۱.۶. را پیدا کنید.

حل. پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=x^2+c \\ y'=2x \end{cases}$$

چون معادله دوم دستگاه به c بستگی ندارد پس جواب مطلوب $y' = 2x$ خواهد بود .

مثال ۱۰.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۷.۱ را پیدا کنید .

حل. پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم .

$$\begin{cases} y = cx \\ y' = c \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

مثال ۱۱.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۸.۱ را پیدا کنید .

حل. پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = cx^2 + 2 \\ y' = 2cx \end{cases}$$

از معادله دوم دستگاه داریم ،

$$c = \frac{y'}{2x}$$

در معادله اول دستگاه بجای c مقدار می‌گذاریم :

$$y = \frac{y'}{2x} x^2 + 2$$

$$= \frac{1}{2} y' x + 2 .$$

اگر دسته منحنی به‌بیش از یک پارامتر بستگی داشته باشد ، مانند :

$$y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن باید n پارامتر را بین $n+1$ معادله ، در دستگاه زیر

حذف کرد ،

$$\begin{cases} y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y' = F'_x(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y'' = F''_{x^2}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \vdots \\ y^{(n)} = F^{(n)}_{x^n}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$$

که نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهد بود .

مثال ۱۲.۱. معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید .

$$y = 2x^2 + c_1 x + c_2$$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم .

$$\begin{cases} y = 2x^2 + c_1 x + c_2 \\ y' = 4x + c_1 \\ y'' = 4 \end{cases}$$

$y'' = 4$ ، جواب مطلوب است .

مثال ۱۳.۱. معادله دیفرانسیل دستهٔ منحنی زیر را پیدا کنید .

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x$$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم ،

$$\begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 x e^x \\ y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \\ y'' = c_1 e^x + 2 c_2 e^x + c_2 x e^x \end{cases}$$

از معادلات دوم و سوم دستگاه داریم ،

$$y'' - 2y' = -c_1 e^x - c_2 x e^x \qquad (۱)$$

طرف راست عبارت (۱) برابر $-y$ می‌باشد ، و جواب مطلوب

$$y'' - 2y' + y = 0 .$$

تعریف ۴.۱. هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، **جواب معادله دیفرانسیل** نامیده می‌شود.

مثال ۱۴.۱. تابع

$$y = 2e^{-4x} \qquad (1)$$

یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y' + 4y = 0 \qquad (2)$$

می‌باشد زیرا از y مشتق می‌گیریم داریم،

$$y' = -8e^{-4x} \qquad (3)$$

(۱) و (۳) را در (۲) جای‌گذاری می‌کنیم، اتحاد برقرار است

$$-8e^{-4x} + 8e^{-4x} = 0.$$

مثال ۱۵.۱. تابع

$$y = 3\cos 2x + \sin 2x$$

یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' + 4y = 0 \qquad (1)$$

می‌باشد زیرا مشتق اول و دوم y را می‌گیریم داریم،

$$y' = -6\sin 2x + 2\cos 2x \quad \text{و} \quad y'' = -12\cos 2x - 4\sin 2x$$

با جای‌گذاری y' و y'' در (۱)، اتحاد برقرار است

$$-12\cos 2x - 4\sin 2x + 12\cos 2x + 4\sin 2x = 0.$$

مثال ۱۶.۱. هریک از توابع

$$y = -\cos x - 5 \quad \text{و} \quad y = -\cos x + 2 \quad \text{و} \quad y = -\cos x$$

یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y' = \sin x$ می‌باشد، و می‌دانیم بطورکلی

$$y = -\cos x + c$$

جواب معادلهٔ دیفرانسیل می‌باشد. (c ثابت دلخواه)

مثال ۱۷.۱. هریک از توابع

$$y = xe^x + \frac{5}{2}e^x \quad , \quad y = xe^x - 2e^x \quad , \quad y = xe^x + e^x$$

یک جواب معادله دیفرانسیل زیر می‌باشد.

$$y' - y = e^x$$

و بطور کلی

$$y = xe^x + ce^x$$

جواب معادله دیفرانسیل می‌باشد. (c ثابت دلخواه)

با توجه به‌دو مثال بالا خواهیم دید که معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد؛ حتی بی‌نهایت جواب، که همگی تحت یک فرمول که شامل یک ثابت دلخواه است بیان می‌شوند. چنین جوابی را **جواب عمومی** می‌نامیم.

توجه ۱. اگر معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n، ثابت دلخواه خواهد بود.

اگر در مثال ۱۶.۱ بخواهیم جواب را طوری تعیین کنیم که منحنی جواب از نقطه (۱ و ۰) عبور کند، در جواب عمومی $y = 1 , x = 0$ قرار می‌دهیم

$$1 = -\cos 0 + c \Rightarrow c = 2$$

در جواب عمومی $c = 2$ قرار می‌دهیم

$$y = -\cos x + 2$$

به‌این جواب، **جواب خصوصی** گویند.

جواب خصوصی به‌این ترتیب بدست می‌آید که جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار می‌دهیم و پارامتر ثابت را تعیین می‌کنیم.

توجه ۲. جواب خصوصی، جوابی است بدون پارامتر و همیشه از جواب عمومی بدست می‌آید. برای روشن شدن مطلب، مسالهٔ میزان تجزیه مادهٔ رادیواکتیو را حل می‌کنیم.

مثال ۱۸.۱. فرض کنید ماده رادیو اکتیوی‌ای داریم و می‌خواهیم بدانیم جرم آن بعد

از t ساعت چقدر می‌شود. می‌دانیم که میزان متلاشی شدن متناسب با جرم موجود است. پس اگر فرض کنیم جرم y باشد،

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

$$\frac{dy}{y} = -k\,dt$$

$$Ln\,y = -kt + Ln\,c$$

$$Ln\frac{y}{c} = -kt$$

$$\frac{y}{c} = e^{-kt}$$

جواب عمومی
$$y = c\,e^{-kt}$$

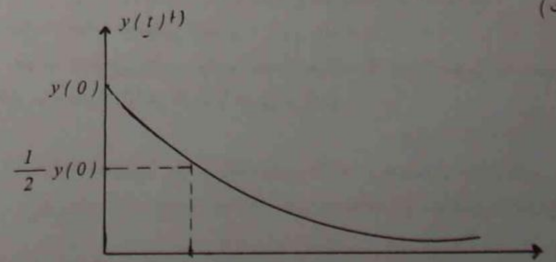
و اگر فرض کنیم در $t = o$ ، گرم $y = 7$ (شرایط اولیه) داریم

$$7 = c\,e^{0} \Rightarrow c = 7$$

و جواب خصوصی

$$y = 7\,e^{-kt}$$

می‌باشد و اگر بخواهیم بدانیم بعد از چه مدتی جرم نصف می‌شود، باید در جواب خصوصی بجای y مقدار $\frac{y}{2}$ را قرار دهیم و t را تعیین کنیم. (k ضریب تناسب معلوم است)



شکل ۴.۱

تعریف ۵.۱. جواب غیرعادی* معادله دیفرانسیل، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد.

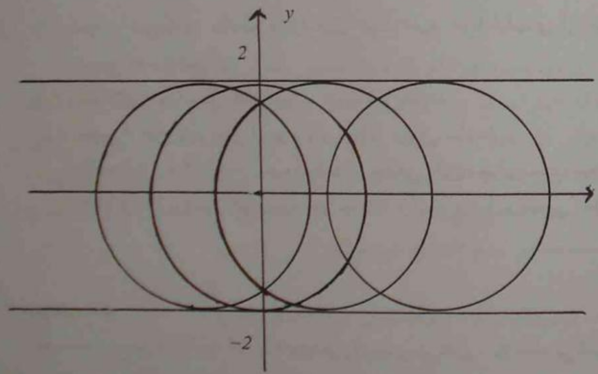
مثال ۱۹.۱. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^2(1 + y'^2) = 4$$

دارای جواب عمومی

$$(x - c)^2 + y^2 = 4$$

است که نشان دهنده دسته دوایری هستند که مرکز آنها نقاط $(c, 0)$ می‌باشد.



شکل ۵.۱

دو خط $y = 2$ و $y = -2$ نیز در معادله صدق می‌کند که $y = \pm 2$ جوابهای غیرعادی این معادله می‌باشند.

درباره راه پیدا کردن جوابهای غیرعادی بعدا صحبت خواهد شد.

* Singular Solution

مثال ۲۰.۱ . معادله دیفرانسیل

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

دارای جواب عمومی

$$y = cx + \frac{1}{c}$$

می‌باشد و جواب غیرعادی معادله

$$y^2 = 4x$$

است .

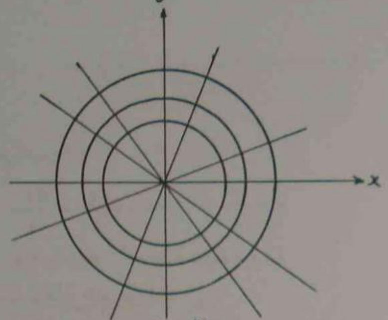
تذکر . (آ) جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل تحت هیچ شرط اولیه‌ای از جواب عمومی بدست نمی‌آید .

(ب) معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند .

(پ) بعضی از معادلات ممکن است دارای جواب عمومی نباشند . مانند $y'^2 + 3 = 0$ که در مجموعه اعداد حقیقی دارای جواب‌نیست ومعادله $|y'| + |y| = 0$ تنها دارای یک جواب $y \equiv 0$ است و جواب عمومی ندارد .

۳.۱ مسیرهای قائم

دو دسته منحنی $x^2 + y^2 = c$ و $y = mx$ را بررسی می‌کنیم . ملاحظه می‌کنیم که هر منحنی از یک دسته ، بر کلیه منحنی‌های دسته دیگر عمود می‌باشد . هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته منحنی برقرار باشد ، یک دسته را مسیرهای قائم دسته‌های دیگر می‌نامیم .



شکل ۶.۱

روش بدست آوردن مسیرهای قائم یک دسته منحنی به‌شرح زیر می‌باشد :

ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می‌کنیم ، سپس در این معادله بجای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست آید . (زیرا در هر نقطه روی مسیر اصلی ، ضریب زاویه منحنی مسیر قائم ، عکس و قرینه ، ضریب زاویه مسیر اصلی می‌باشد) . آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل مسیر قائم را حل می‌کنیم . دسته منحنی مسیر قائم بدست می‌آید .

مثال ۲۱.۱ . مسیرهای قائم ، دسته منحنی زیر را بدست آورید .

$$x^2 + y^2 = c$$

حل . ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل می‌دهیم ،

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c \\ 2x + 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

۲yy'

بجای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم ؛ معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست می‌آید .

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}$$

حال این معادله را حل می‌کنیم :

$$y' = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$Ln\, y = Ln\, x + Ln\, m \quad \Rightarrow \ y = mx$$

و $y = mx$ دسته منحنی ، مسیرهای قائم می‌باشد .

جون هنوز طریق حل معادلات دیفرانسیل بیان نشده است مسائل مربوط به مسیرهای قائم را در قسمت تمرینهای دوره‌ای فصل دوم می‌آوریم .

مجموعه مسائل فصل ۱

مرتبه معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید و تحقیق کنید تابع داده شده یک جواب می‌باشد .

۱. $y' + 5y = 0$ ، $y = c\, e^{-5x}$

۲. $y'' + 4y' + 5y = 0$ ، $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$

۳. $y' - 2y + 3 = 0$ ، $y = c\, e^{2x} + \frac{3}{2}$

۴. $y'x\, Ln\, x - y = 0$ ، $y = c\, Ln\, x$

۵. $(x - 2y)\, y' = 2x - y$ ، $x^2 - xy + y^2 = c^2$

۶. $(x - y + 1)\, y' = 1$ ، $y = x + c\, e^{y}$

۷. $(xy - x)\, y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$ ، $y = Ln(xy)$

۸. $xy' - x \sin x = y$ ، $y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

۹. $y' = \frac{y}{x} + e^x$ ، $y = x\left(\int \frac{e^x}{x}\, dx + c\right)$

۱۰. $y' - 2xy = 1$ ، $y = e^{x^2}\left[\int e^{-x^2} dx + c\right]$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های زیر را تشکیل دهید .

۱۱. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

۱۲. $y^2 + \frac{1}{x} = 2 + c\, e^{-y^2/2}$

۱۳. $x^3 = c(x^2 - y^2)$

۱۴. $Ln \frac{x}{y} = 1 + cy$

۱۵. $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{x} + c_3$

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

صورت کلی این معادلات، به‌فرم $F(x,y,y')=0$ می‌باشد. در این فصل طریق حل این معادله را وقتی که $y'=f(x,y)$ ، $x=f(y,y')$ ، $y=f(x,y')$ باشد، ارائه می‌دهیم. در چند بخش اول این فصل به‌تفصیل در مورد حل معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=y'=f(x,y)$ بحث خواهد شد.

۱۰۲ معادلات تفکیک‌پذیر (متغیرهای از هم جدا)

اگر داشته باشیم $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ که در آن f_1 تابعی تنها از x و f_2 تابعی تنها از y باشد در این‌صورت داریم

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)$$

یا

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)\,dx$$

و یا بفرم کلی

$$q(x)\,dx+g(y)\,dy=0 \qquad (1)$$

با انتگرال‌گیری از (۱) جواب عمومی بدست می‌آید.

تذکر ۱: برای حل معادلات مرتبهٔ اول به فرم $y'=f(x,y)$، ابتدا مخرجها را از بین می‌بریم و سپس معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \qquad (۲)$$

اگر (۲) به‌فرم

$$f_1(x)f_2(y)\,dx+f_3(x)f_4(y)\,dy=0 \qquad (۳)$$

باشد، طرفین (۳) را در $1/f_2(y)f_3(x)$ ضرب می‌کنیم تا به‌فرم (۱) درآید.

مثال ۱.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=e^{x+y}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را در dx ضرب کرده،

$$dy=e^{x+y}\,dx$$

و طرفین را در e^{-y} ضرب می‌کنیم.

$$e^{-y}\,dy=e^{x}\,dx$$

سپس از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int e^{-y}\,dy=\int e^{x}\,dx$$

$$-e^{-y}=e^{x}+c.$$

مثال ۲.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'\cot x=2+y$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را در dx ضرب کرده،

$$\cot x\,dy=(2+y)\,dx$$

$$\frac{dy}{2+y}=\tan x\,dx$$

سپس از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$Ln\,|2+y|=-Ln\,|\cos x|+Ln\,c \qquad ,c>0$$

$$=Ln\,\frac{c}{|\cos x|}$$

$$y+2=c\,Sec\,x$$

مثال ۳.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=\frac{x(1+y)}{y(x+2)}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$y(x+2)\,dy=x(1+y)\,dx$$

دو طرفین را بر $(1+y)(x+2)$ تقسیم می‌کنیم، داریم

$$\frac{y}{1+y}\,dy=\frac{x}{x+2}\,dx$$

سپس با انتگرال‌گیری از طرفین معادلهٔ بالا داریم

$$y-Ln\,|1+y|=x-2\,Ln\,|x+2|+c.$$

مثال ۴.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

را حل کنید.

حل. معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$xy(1+x^2)\,dy=(1+y^2)\,dx$$

طرفین را بر $x(1+x^2)(1+y^2)$ تقسیم می‌کنیم، داریم

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy=\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

سپس از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \qquad (۱)$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2}$$

$$1 \equiv A(1+x^2)+Bx^2+Dx \qquad (۲)$$

در (۲) به‌ازای $x=0$ داریم

$$1=A$$

و به‌ازای $x=1$ داریم

$$1=2+B+D \qquad (۳)$$

و به‌ازای $x=-1$ داریم

$$1=2+B-D \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم :

$$D=0 \quad , B=-1$$

با توجه به‌مقادیر A ، B و D ، (۱) به‌فرم زیر درمی‌آید

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int\frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}Ln(1+y^2) = Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(1+x^2)+Ln\,c$$

$$1+y^2 = \frac{cx^2}{1+x^2}$$

مثال ۵۰۲. طبق قانون نیوتن، درجه سرد شدن یک جسم در هوا متناسب با تفاضل دمای جسم، U° و دمای هوا، U_0° می‌باشد . اگر دمای هوا $۲۰^\circ c$ و دمای اولیه جسم $۴۵^\circ c$ باشد، و در مدت ۱۰ دقیقه دمای جسم به $۴۰^\circ c$ برسد، پس از چه مدت دمای جسم به $۳۰^\circ c$ می‌رسد؟

حل . ابتدا این قانون را با علایم ریاضی بیان می‌کنیم .

$$\frac{du}{dt} = -k(u-u_0) \quad , k>0$$

این معادله از نوع متغیرهای ازهم جدا می‌باشد.

$$\frac{du}{u-u_0} = -k\,dt$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$Ln(u-u_0) = -kt+Ln\,c \quad , \quad c>0$$

$$u = u_0 + ce^{-kt} \qquad (۱)$$

(ملاحظه می‌کنیم که $t\to\infty$ آنگاه $u\to u_0$)

با توجه به‌شرایط اولیه، مقدار c را تعیین می‌کنیم،

$$45 = 20+ce^0 \Rightarrow c = 25^0$$

مقدار $c=25^0$ را در (۱) می‌گذاریم تا جواب خصوصی معادله بدست آید .

$$u = 20+25e^{-kt}$$

چون در $t=10$ ، $u=40^0$ است، پس

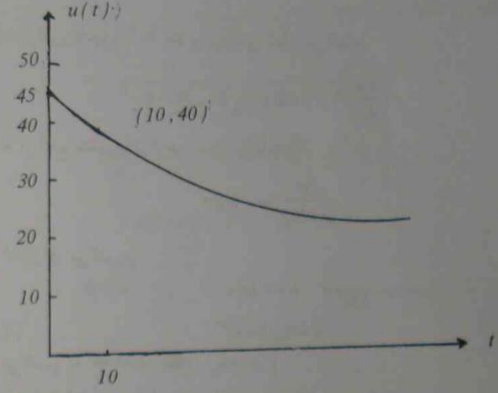
$$40 = 20+25e^{-10k} \Rightarrow k=0.022$$

$$u = 20+25e^{-0.022t}$$

$$30 = 20+25e^{-0.022t}$$

$$\frac{10}{25} = e^{-0.022t} \Rightarrow Ln\frac{10}{25} = -0.022t$$

$$Ln\frac{25}{10} = 0.022t \Rightarrow t = \frac{1}{0.022}Ln\frac{25}{10}$$



شکل ۱۰۲

تذکر ۲ : معادلاتی به‌فرم

$$y'=f(ax+by+c) \qquad (۴)$$

را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر زیر تبدیل به‌فرم متغیرهای ازهم جدا نمود

$$U=ax+by+c \qquad (۵)$$

زیرا، با مشتقگیری نسبت x از طرفین (۲) داریم

$$U'=a+by' \Rightarrow y'=\frac{1}{b}(U'-a) \qquad (۶)$$

با جای‌گذاری (۵) و (۶) در (۴) داریم

$$\frac{1}{b}(U'-a)=f(U) \Rightarrow U'=bf(U)+a=h(U)$$

و

$$\frac{du}{h(u)}=dx$$

مثال ۶۰۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=\tan(x+y)-1$$

را حل کنید .

حل .

$$U=x+y \Rightarrow y'=U'-1$$

$$U'-1=\tan(U)-1 \Rightarrow \cot U\,dU=dx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$Ln\,|\sin u|=x+c_1 \Rightarrow \sin u=c\,e^x$$

$$y+x=\sin^{-1} c\,e^x.$$

مثال ۷۰۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=1+\frac{1}{x-y}$$

را حل کنید .

حل .

$$u=x-y \Rightarrow y'=1-u'$$

$$1-u'=1+\frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{u} \Rightarrow u\,du=-dx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا

$$\frac{1}{2}u^2=-x+c$$

$$(x-y)^2=-2x+c.$$

مجموعه مسائل ۱۰۲ .

۱ . $yx^2\,dy-2x^2\,dy=y^3\,dx$

۲. $y'=\dfrac{4xy}{x^2+1}$

۳. $t(y-1)\,dt+y(t+1)\,dy=0$

۴. $x^2yy'-e^y=0$

۵. $y\,dx-x\,Ln x\,dy=0 \quad , \quad x>1$

۶. $\sqrt{1+y^2}\,dx-y(1+x^2)\,dy=0$

۷. $\sin x\,dx-2y\,dy=0 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2})=0$

۸. $\dfrac{dr}{ds}=\dfrac{(1+r)^2}{1-s} \quad , \quad r(0)=1$

۹. $y'=\dfrac{1+y^2}{xy} \quad , \quad y(2)=3$

۱۰. $\tan t\,\dfrac{dy}{dt}-y\sec^2 t=0$

۱۱. $y'\,Ln x-\dfrac{y}{x}=0 \quad , \quad x>0$

۱۲. $xy'=(1-x^2)\cot y$

۱۳. $y'\sin x=y\,Ln y$

۱۴. $xy'+(1+y^2)\tan^{-1}y=0$

۱۵. $e^{y^2}(x^2+2x+1)=-(xy+y)y'$

۱۶. $y'=x+1+xy^2+y^2$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

۱۷. $xy^2(xy'+y)=4 \quad , xy=t$

۱۸. $(Ln x+y^3)\,dx-3xy^2\,dy=0 \quad , \quad \dfrac{y^3}{x}=t$

۱۹. $(xy+2xy\,Ln^2y+y\,Ln y)\,dx+(2x^2\,Ln y+x)\,dy=0 \quad , \quad x\,Ln y=t$

۲۰. $y'=2x+y$

۲۱. $y'=\cos(x-y)$

۲۲. $y'=-2(2x+3y)^2$

۲.۲ معادلات همگن

تعریف ۲.۱. تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم، اگر

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y).$$

مثال ۲.۸. نشان دهید تابع زیر، همگن از درجه ۳ می‌باشد

$$f(x,y)=x^3+5xy^2+3y^3$$

حل. به‌جای x، λx و به‌جای y، λy می‌گذاریم، داریم

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3x^3+5\lambda x\lambda^2y^2+3\lambda^3y^3=\lambda^3(x^3+5xy^2+3y^3)$$
$$=\lambda^3 f(x,y).$$

مثال ۲.۹. نشان دهید تابع زیر همگن از درجه ۱ می‌باشد

$$f(x,y)=x\sin\frac{y}{x}$$

حل. به‌جای x، λx و به‌جای y، λy می‌گذاریم، داریم

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x\sin\frac{\lambda y}{\lambda x}=\lambda x\sin\frac{y}{x}=\lambda f(x,y).$$

مثال ۲.۱۰. توابع $xe^{x/y}$ و x^2+xy ، $\tan^{x/y}$ ، $x+\sqrt{xy}$ به‌ترتیب همگن از درجه ۱، ۲، ۰ و ۱ می‌باشند و توابع

$$xe^x \;,\; x^2+y \;.\; xy+3 \;,\; (x^2+y^2)\cos y$$

همگن نیستند .

تعریف ۲.۲. هر معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را که در آن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ ، هردو همگن از درجه n باشند ، یک **معادلهٔ دیفرانسیل همگن** نامیده می‌شود . برای حل این نوع معادلات ، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم .

$$y=vx \quad , \quad dy=vdx+xdv$$

با این تغییر متغیر ، معادله همگن ، تبدیل به‌نوع متغیرهای از هم جدا می‌شود .

مثال ۱۱.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$2xydy+(x^2-y^2)dx=0$$

را حل کنید .

حل . معادله همگن می‌باشد .

$$y=vx \quad , \quad dy=vdx+xdv$$

$$2xvx(vdx+xdv)+(x^2-v^2x^2)dx=0$$

طرفین معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم .

$$(v^2+1)dx+2vxdv=0$$

معادله تبدیل به‌نوع متغیرهای از هم جدا می‌شود .

$$\frac{dx}{x}+\frac{2v}{1+v^2}dv=0$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$Ln\,x+Ln(1+v^2)=Ln\,c$$

$$x(1+v^2)=c$$

$$x(1+\frac{y^2}{x^2})=c$$

$$y^2+x^2=cx$$

مثال ۱۲.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(y-x)y'=y^2$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم،

$$y^2dx=x(y-x)dy$$

معادله از نوع همگن می‌باشد.

$$v^2x^2dx=x(vx-x)(vdx+xdv)$$

سپس طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$vdx=x(v-1)dv$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{v-1}{v}dv$$

معادله تبدیل به‌نوع متغیرها از هم جدا می‌شود . با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$Ln\,x=v-Ln\,v+Ln\,c$$

$$Ln\frac{vx}{c}=v \Rightarrow vx=ce^v$$

$$y=ce^{y/x}.$$

مثال ۱۳.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$$

را حل کنید .

حل . معادله همگن است ، پس

$$x^3(1+v^3)dx+3x^3v^2(vdx+xdv)=0$$

طرفین را بر x^3 تقسیم می‌کنیم

$$(1+v^3)dx+3v^3dx+3xv^2dv=0$$

$$(1+4v^3)\,dx + 3xv^2\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{3v^2}{1+4v^3}\,dv = 0$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$Ln\,x + \frac{1}{4}\,Ln\,(1+4v^3) = Ln\,c_1$$

$$x^4(1+4v^3) = c$$

$$x^4 + 4xy^3 = c\ .$$

مثال ۱۴.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$$

را حل کنید.

حل: معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(x+\sqrt{xy})\,dy - y\,dx = 0$$

معادله همگن می‌باشد.

$$(x+\sqrt{x^2v})(v\,dx + x\,dv) - vx\,dx = 0$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم

$$(1+\sqrt{v})(v\,dx + x\,a\,v) - v\,dx = 0$$

$$v\sqrt{v}\,dx + x(1+\sqrt{v})\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\,dv = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int v^{-3/2}dv + \int\frac{dv}{v} = c$$

$$Ln\,x - 2v^{-1/2} + Ln\,v = c$$

$$Ln\,vx = c + 2v^{-1/2}$$

$$Ln\,y = c + 2\sqrt{\frac{x}{y}}\ .$$

مثال ۱۵.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx - \left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله همگن می‌باشد.

$$v\cos v\,dx - \left(\frac{1}{v}\sin v + \cos v\right)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$-\sin v\,dx - x\left(\frac{1}{v}\sin v + \cos v\right)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} + \cot v\,dv = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$Ln\,x + Ln\,v + Ln\,|\sin v| = Ln\,c$$

$$xv\sin v = c$$

$$y\sin\frac{y}{x} = c\ .$$

مثال ۱۶.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' - \frac{y}{x} + csc\,\frac{y}{x} = 0\ ,\quad y(1) = 0$$

را حل کنید.

حل. معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$dy + \left(-\frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x}\right)dx = 0$$

معادله از نوع همگن می‌باشد.

$$v\,dx + x\,dv + (-v + \csc v)\,dx = 0$$

$$x\,dv + \csc v\,dx = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \sin v\,dv = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$Ln\,x - \cos v = c \;\Rightarrow\; Ln\,x - \cos\frac{y}{x} = c$$

$$Ln\,1 - \cos 0 = c \;\Rightarrow\; c = -1$$

$$Ln\,x = \cos\frac{y}{x} - 1.$$

مثال۲.۱۷. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

را حل کنید.

حل. معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(y+x)\,dy = (y-x)\,dx$$

معادله همگن می‌باشد.

$$(vx+x)(v\,dx + x\,dv) = (vx-x)\,dx$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم

$$v^2dx + xv\,dv + x\,dv = -dx$$

$$(v^2+1)\,dx + x(v+1)\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v+1}{v^2+1}\,dv = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{v}{v^2+1}\,dv + \int\frac{dv}{v^2+1} = c_1$$

$$Ln\,x + \frac{1}{2}\,Ln(v^2+1) + \tan^{-1}v = c_1$$

$$Ln\,x^2(1+v^2) + 2\tan^{-1}v = c \quad , \quad c = 2c_1$$

$$Ln(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = c.$$

تذکر ۱. معادلات به‌فرم

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right) \qquad (۱)$$

همگن می‌باشند و با تغییر متغیر

$$y = vx \;,\; \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad (۲)$$

تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می‌شوند. زیرا با جای‌گذاری (۲) در (۱) داریم

$$v + x\frac{dv}{dx} = f\left(\frac{a+bv}{c+ev}\right)$$

$$x\frac{dv}{dx} = f\left(\frac{a+bv}{c+ev}\right) - v = F(v)$$

یا

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{dx}{x}$$

که از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد.

توجه. در (۱)، v' تابعی از یک کسر می‌باشد که صورت و مخرج آن دو خط

هستند که از مبداء مختصات عبور می‌کنند .

تذکر ۲ . معادلات به‌فرم

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ex + hy + d}\right) \qquad (۳)$$

همگن نمی‌باشند ، ولی قابل تبدیل به‌همگن هستند . اختلاف این معادله با (۱) در آنست که هردو خط صورت و مخرج معادله (۳) از مبداء نمی‌گذرند (c و d ، با هم صفر نیستند) . پس کافی است که مبداء مختصات را به‌محل تلاقی دو خط انتقال دهیم ؛ البته اگر دو خط موازی نباشند .

طریق حل: ابتدا $ah - be$ را حساب می‌کنیم ، اگر مخالف صفر باشد ، دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند . مختصات نقطه تلاقی را از حل دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ex + hy + d = 0 \end{cases}$$

پیدا می‌کنیم . فرض کنید (x_0 , y_0) ، سپس تغییر متغیر

$$\begin{aligned} x &= X + x_0 \\ y &= Y + y_0 \end{aligned} \qquad (۴)$$

می‌دهیم . معادله (۳) به‌فرم

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{eX + hY}\right)$$

در می‌آید که همگن است .

مثال ۱۸.۲ . معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x - y - 4}$$

را حل کنید .

حل . ابتدا ، مقدار $ah - be$ را حساب می‌کنیم

$$ah - be = -1 - 1 \neq 0$$

یعنی دو خط موازی نیستند . از حل دستگاه زیر مختصات نقطه تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1 \ , \ y_0 = -3$$

با جای‌گذاری

$$x = X + 1 \quad , \quad dx = dX$$

و

$$y = Y - 3 \quad , \quad dy = dY$$

در معادله ، داریم

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y}{X - Y}$$

که همگن می‌باشد و قرار می‌دهیم

$$Y = vX \quad , \quad dY = v\,dX + X\,dv$$

$$(X - Y)\,dY = (X + Y)\,dX$$

$$X(1 - v)(v\,dX + X\,dv) = X(1 + v)\,dX$$

طرفین را بر X تقسیم می‌کنیم .

$$(1 + v^2)\,dX + X(v - 1)\,dv = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{v - 1}{1 + v^2}\,dv = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ء بالا داریم

$$Ln\,X + \frac{1}{2} Ln(1 + v^2) - tan^{-1} v = c$$

$$Ln\,X + \frac{1}{2} Ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right) - tan^{-1} \frac{Y}{X} = c$$

$$Ln(x-1)+\frac{1}{2}Ln\left(1+\frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right)-tan^{-1}\frac{y+3}{x-1}=c.$$

تذکر ۳. اگر دو خط موازی باشند، $(ah-be=0)$، با استفاده از تغییر متغیر

$$u=ax+by \qquad (۵)$$

یا

$$u=ex+hy$$

معادله (۳) تبدیل به‌نوع متغیرهای ازهم جدا می‌شود. زیرا

$$u=ax+by$$

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx}-a\right) \qquad (۶)$$

با جای‌گذاری (۵) و (۶) در معادله (۳) داریم

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx}-a\right)=f\left(\frac{u+c}{ku+d}\right)$$

$$\frac{du}{dx}=bf\left(\frac{u+c}{ku+d}\right)+a=H(u)$$

یا

$$\frac{du}{H(u)}=dx.$$

مثال ۱۹.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=\frac{x+y}{1-x-y}$$

را حل کنید.

حل. دو خط موازی هستند.

$$u=x+y$$

$$u'=1+y' \;,\; y'=u'-1$$

$$u'=\frac{u}{1-u}+1$$

$$=\frac{1}{1-u}$$

یا

$$(1-u)\,du=dx$$

با انتگرال‌گیری از معادله بالا، داریم

$$u-\frac{1}{2}u^2=x+c$$

$$x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2=x+c$$

$$y=\frac{1}{2}(x+y)^2+c.$$

مثال ۲۰.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x-2\sin y+3)\,dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم.

$$\sin y=z$$

از طرفین، دیفرانسیل می‌گیریم

$$\cos y\,dy=dz$$

در معادله جای‌گذاری می‌کنیم، داریم

$$(x - 2z + 3)\,dx + (2x - 4z - 3)\,dz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x - 2z + 3}{2x - 4z - 3} \qquad (۱)$$

با استفاده از تغییر متغیر، $u = x - 2z$ داریم

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right)$$

بجای $x - 2z$ و $\frac{dz}{dx}$ در (۱) مقادیر فوق را قرار می‌دهیم

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = -\frac{u + 3}{2u - 3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u + 3}{2u - 3}$$

$$\frac{2u - 3}{4u + 3}\,du = dx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا، داریم

$$x = \frac{u}{2} - \frac{9}{8}\,Ln\,|4u + 3| + c$$

بجای u، مقدار می‌گذاریم

$$x = \frac{1}{2}(x - 2z) - \frac{9}{8}\,Ln\,|4x - 8z + 3| + c$$

بجای z، مقدار می‌گذاریم. در نتیجه

$$8\sin y - 4x + 9\,Ln\,|4x - 8\sin y + 3| = c.$$

تذکر ۴. بعضی ازمعادلات دیفرانسیل، ممکن است با تغییر متغیر

$$y = t^{\alpha}, \quad dy = \alpha t^{\alpha - 1}\,dt$$

به‌معادله همگن تبدیل شوند.

مثال ۲.۲۱. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(y^4 - 3x^2)\,dy + xy\,dx = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$y = t^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad dy = \alpha t^{\alpha - 1}\,dt$$

را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$(t^{4\alpha} - 3x^2)(\alpha t^{\alpha - 1})\,dt + x t^{\alpha}\,dx = 0$$

$$\alpha(t^{5\alpha - 1} - 3x^2 t^{\alpha - 1})\,dt + x t^{\alpha}\,dx = 0 \qquad (۲)$$

برای آنکه (۲) همگن باشد، باید ضرایب dt و dx هردو همگن بــا درجه همگنی برابر باشند. پس قرار می‌دهیم

$$5\alpha - 1 = 2 + \alpha - 1 \qquad (۳)$$

از حل (۳) بدست می‌آوریم

$$4\alpha = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

به‌ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، ضریب dt، همگن از درجه $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. حال باید ضـریب dx به‌ازای همین مقدار α، همگن از درجه $\frac{۳}{۲}$ باشد. درجه ضریب dx، در این مثـــال $1 + \alpha$ اســـت که به‌ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، مساوی $\frac{۳}{۲}$ می‌شود. بنابراین، معادله با تغییر متغیر $y = t^{1/2}$ قابل تبدیل به‌معادلهٔ همگن است.

در (۲) بجای α، $\frac{1}{2}$ می‌گذاریم

$$\frac{1}{2}(t^{3/2} - 3x^2 t^{-1/2})\,dt + x t^{1/2}\,dx = 0 \qquad (۴)$$

طرفین (۴) را در $t^{1/2}$ ضرب می‌کنیم

$$(t^2 - 3x^2)\,dt + 2xt\,dx = 0 \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵) همگن است. قرار می‌دهیم

$$t = vx, \quad dt = v\,dx + x\,dv$$

$$x^2(v^2 - 3)(v\,dx + x\,dv) + 2x^2 v\,dx = 0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$(v^3 - v)\,dx + x(v^2 - 3)\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 3}{v^3 - v}\,dv = 0$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v^2 - 3}{v\,(v^2 - 1)}\,dv = c_1 \qquad (۶)$$

برای محاسبه انتگرال طرف راست (۶)، ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{v^2 - 3}{v\,(v^2 - 1)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} + \frac{C}{v+1} \qquad (۷)$$

$$v^2 - 3 \equiv A\,(v-1)(v+1) + Bv\,(v+1) + c\,(v-1)\,v$$

به‌ازای $v = 0$ بدست می‌آوریم

$$A = 3$$

به‌ازای $v = 1$ ،

$$B = -1$$

به‌ازای $v = -1$ ،

$$c = -1$$

مقادیر A و B و C را در (۷) قرار می‌دهیم، (۶) به‌فرم

$$\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v-1} - \int \frac{dv}{v+1} = c_1$$

درمی‌آید

$$Ln\,|x| + 3\,Ln\,|v| - Ln\,|v-1| - Ln\,|v+1| = Ln\,c$$

$$\frac{xv^3}{v^2 - 1} = c$$

$$\frac{x\,\dfrac{t^3}{x^3}}{\dfrac{t^2}{x^2} - 1} = c$$

$$\frac{t^3}{t^2 - x^2} = c$$

بجای t ، y^2 قرار می‌دهیم

$$\frac{y^6}{y^4 - x^2} = c.$$

مثال ۲.۲۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$4xy^2dx + (3x^2y - 1)\,dy = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. $y = t^{\alpha} \Rightarrow dy = \alpha t^{\alpha-1}dt$

را در (۱) قرار می‌دهیم.

$$4xt^{2\alpha}dx + (3x^2t^{\alpha} - 1)(\alpha t^{\alpha-1})\,dt = 0 \qquad (۲)$$

با توجه به‌توضیحات مثال ۲.۲۱، باید

$$1 + 2\alpha = \alpha - 1$$

$$\alpha = -2$$

به‌ازای $\alpha = -2$ ، ضریب dt ، همگن از درجه ۳− می‌باشد و به‌ازای همین مقدار α ، ضریب dx نیز همگن از درجه ۳− می‌شود. پس با تغییر متغیر $y = t^{-2}$ ، معادله تبدیل به‌نوع همگن می‌شود.

در (۲)، $\alpha = -2$ قرار می‌دهیم.

$$4xt^{-4}dx - 2\,(x^2t^{-5} - t^{-3})\,dt = 0$$

یا

$$4xt\,dx - 2\,(x^2 - t^2)\,dt = 0 \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳) همگن است. قرار می‌دهیم

$$t = vx \;,\quad dt = v\,dx + x\,dv$$

$$4x^2v\,dx - 2x^2(1 - v^2)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$(v^3 - v)\,dx + x\,(v^2 - 3)\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2-3}{v^3-v}dv = 0$$

از طرفین رابطه بالا انتگرال می‌گیریم ، با توجه به (۶) مثال ۲۱۰۲. داریم

$$\frac{t^3}{t^2-x^2}=c$$

به‌جای t ، $y^{-1/2}$ قرار می‌دهیم

$$\frac{y^{-3/2}}{y^{-1}-x^2}=c$$

یا

$$y(1-x^2y)^2=c$$

مجموعهٔ مسائل ۲۰۲

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $$y'=\frac{2x^2+y^2}{-2xy+3y^2}$$

۲. $$x\,dy-y\,dx=\sqrt{xy}\,dx$$

۳. $$(y^2-2xy)\,dx+(2xy-x^2)\,dy=0$$

۴. $$xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$$

۵. $$(x\,e^{y/x}+y)\,dx-x\,dy=0$$

۶. $$y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$$

۷. $$x(y'+e^{y/x})=y$$

۸. $$(x^2+xy)\,y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$$

۹. $$y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$$

۱۰. $$x\,dy=y\cos Ln\frac{y}{x}dx$$

۱۱. $$xy'=y+x\tan\frac{y}{x}$$

۱۲. $$y'=\frac{x-y}{x+3y}$$

۱۳. $$\frac{dx}{dy}=\frac{5x-y}{2x+2y}$$

۱۴. $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+4y+2}$$

۱۵. $$y'=\frac{x-3y+3}{2x-6y+1}$$

۱۶. $$(x+y-1)^2dy=2(y+2)^2dx$$

*۱۷. $$y'-\tan\frac{y-2x}{x+1}=\frac{y+2}{x+1}$$

۱۸. $$y'\,Ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}-Ln\frac{y+x}{x+3}$$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر

$$y=xv\ ,\quad y'=v+xv'$$

حل کنید.

۱۹. $$xy'=y+x^2\sec\frac{y}{x}$$

۲۰. $$(x^2+1)\,y\,(xy'-y)=x^3$$

۲۱. $$xy'-y-x^2\tan\frac{y}{x}=0$$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر

$$y=t^{\alpha}\ ,\quad dy=\alpha t^{\alpha-1}dt$$

حل کنید.

۲۲. $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$

۲۳. $y(1+\sqrt{x^2y^4+1})dx + 2x\,dy = 0$

۲ . ۲ معادلات دیفرانسیل کامل

می‌دانیم دیفرانسیل یک تابع از دو متغیر مستقل x و y، مانند $u(x,y)$، بوسیله

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (1)$$

داده می‌شود.

تعریف ۳ . ۲ . معادله‌ٔ دیفرانسیل به فرم

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

را کامل گوییم، اگر تابعی مانند $u(x,y)$ وجود داشته باشد. بطوری که

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$$

$$(3)$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

باشد.

قضیه زیر بیان می‌کند، تحت چه شرایطی یک معادله‌ٔ دیفرانسیل به‌فرم (۲) کامل می‌باشد:

قضیه* ۱ . ۲ . فرض کنید P و Q و $\frac{\partial P}{\partial y}$ ، $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه‌ای مانند D پیوسته‌باشند. آنگاه

* اثبات در کتاب William E.Boyce and R.C.Diprima , Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems , 3 d ed . P. 38 New York : Wiley 1997

شرط لازم و کافی برای آنکه معادله‌ٔ دیفرانسیل به‌فرم

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

کامل باشد، آنست که

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (4)$$

باشد.

حال فرض کنید در (۲)، P و Q طوری باشند که شرط (۴) برقرار باشد. پس بنابر قضیه ۱ . ۲ . معادله (۲) کامل است و در نتیجه تابعی مانند $u(x,y)$ وجود دارد به قسمی که

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$
$$= P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

از طرفی

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

است، پس $du = 0$ و داریم

$$u(x,y) = c \qquad (5)$$

یعنی جواب عمومی معادله‌ٔ دیفرانسیل کامل (۲)، منحنی‌های تراز (۵) می‌باشند.

روش تحلیلی جهت بدست آوردن جواب عمومی، معادله‌ٔ دیفرانسیل کامل. از (۳)، a، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \qquad (6)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x از طرفین (۶) داریم

$$u = \int^x P(x,y)dx + f(y) \qquad (7)$$

در (۷)، y بعنوان یک پارامتر محسوب شده است و $f(y)$ به‌عنوان مقدار ثابت انتگرال‌گیری می‌باشد. زیرا $\frac{\partial u}{\partial x}$ یعنی مشتق تابع $u(x,y)$ نسبت به x، وقتی که

y بعنوان ثابت در نظر گرفته شود. برای پیدا کردن $f(y)$، از (۳)، b، استفاده می‌کنیم. یعنی $f(y)$ را طوری پیدا می‌کنیم که

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

باشد. برای اینکار از طرفین (۷) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x}P(x,y)\,dx\right]+\frac{df(y)}{dy}=Q(x,y)$$

$$\frac{df(y)}{dy}=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x}P(x,y)\,dx\right]$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$f(y)=\int\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int^{x}P(x,y)\,dx\right]dy \qquad (۸)$$

$f(y)$ محاسبه شده را در (۷) قرار می‌دهیم و جواب عمومی $u(x,y)=c$ می‌باشد.

تذکر ۱. می‌توان بجای (۷)، نوشت

$$u=\int^{y}Q(x,y)\,dy+f(x) \qquad (۹)$$

و بعد از محاسبه انتگرال فوق، نسبت به x مشتق گرفته و قرار دهیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y).$$

مثال ۲۳۰۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(2xy+3)\,dx+(x^2+8y)\,dy=0$$

را حل کنید.

حل. ابتدا شرط (۴) را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

یعنی معادلهٔ دیفرانسیل کامل است.

$$u=\int P(x,y)\,dx+f(y)$$
$$=\int(2xy+3)\,dx+f(y)$$
$$=x^2y+3x+f(y) \qquad (۱)$$

از طرفین (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\frac{df(y)}{dy}=x^2+8y$$

$$\frac{df(y)}{dy}=8y$$

$$f(y)=4y^2$$

بجای $f(y)$ در (۱) مقدار می‌گذاریم و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

$$x^2y+3x+4y^2=c.$$

مثال ۲۴۰۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=\frac{x^3-y}{x}$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را به‌فرم

$$(x^3-y)\,dx-x\,dy=0$$

می‌نویسیم، سپس شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

پس معادلهٔ دیفرانسیل کامل است

$$u=\int Q(x,y)\,dy+f(x)$$

$$= \int -x\,dy + f(x)$$

$$= -xy + f(x) \qquad (۱)$$

از طرفین (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y + \frac{df(x)}{dx} = x^3 - y$$

$$\frac{df(x)}{dx} = x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4$$

بجای $f(x)$ در (۱) مقدار می‌گذاریم

$$c = -xy + \frac{1}{4}x^4 .$$

مثال ۲۵.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^2 - x + y^2)\,dx - (e^y - 2xy)\,dy = 0$$

را حل کنید.

حل. شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

پس معادلهٔ دیفرانسیل کامل است

$$u = \int (x^2 - x + y^2)\,dx + f(y)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + y^2x + f(y) \qquad (۱)$$

از طرفین (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx + \frac{df(y)}{dy} = -e^y + 2xy$$

$$\frac{df(y)}{dy} = -e^y$$

$$f(y) = -e^y$$

بجای $f(y)$ در (۱)، $-e^y$ قرار می‌دهیم

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + y^2x - e^y = c .$$

مثال ۲۶.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\cos y\,dx + (y^2 - x\sin y)\,dy = 0$$

را حل کنید.

حل. شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y$$

پس معادلهٔ دیفرانسیل کامل است

$$u = \int \cos y\,dx + f(y)$$

$$= x\cos y + f(y) \qquad (۱)$$

از طرفین (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$h'(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y + \frac{df(y)}{dy} = y^2 - x\sin y$$

$$\frac{df(y)}{dy} = y^2$$

$$f(y) = \frac{1}{3}y^3$$

در (۱) بجای $f(y)$، مقدار می‌گذاریم

$$x\cos y + \frac{1}{3}y^3 = c .$$

مثال ۲۷.۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)\,dx + (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\,dy = 0 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل . فرض می‌کنیم

$$\sin y = T \qquad (2)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$\cos y\,dy = dT \qquad (3)$$

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم ، داریم

$$(4x^3T^3 - 2xT)\,dx + (3x^4T^2 - x^2)\,dT = 0 \qquad (4)$$

شرط کامل بودن را برای معادلهٔ دیفرانسیل (۴) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial T} = 12x^3T^2 - 2x \;\text{و}\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3T^2 - 2x$$

یعنی ، معادلهٔ دیفرانسیل (۴) کامل می‌باشد .

$$\begin{aligned} u &= \int (4x^3T^3 - 2xT)\,dx + f(T) \\ &= x^4T^3 - x^2T + f(T) \end{aligned} \qquad (5)$$

از طرفین (۵) نسبت به T مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial T} = 3x^4T^2 - x^2 + \frac{df(T)}{dT} = 3x^4T^2 - x^2$$

$$\frac{df(T)}{dT} = 0$$

$$f(T) = c$$

در (۵) بجای $f(T)$ ، c می‌گذاریم

$$x^4T^3 - x^2T = c \qquad (6)$$

در (۶) بجای T ، $\sin y$ می‌گذاریم ، داریم

$$x^4\sin^3 y - x^2\sin y = c \,.$$

مجموعه مسائل ۳.۲

نشان دهید معادلات دیفرانسیل زیرکامل هستند و جواب عمومی را بدست آورید.

۱. $(x^2+y)\,dx + (x-2y)\,dy = 0$

۲. $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)\,dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)\,dy = 0$

۳. $x(1-y^2)\,dx + y(8-x^2)\,dy = 0$

۴. $2x\sin 3y\,dx + 3x^2\cos 3y\,dy = 0$

۵. $(y^2e^{xy^2} + 4x^3)\,dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)\,dy = 0$

۶. $y' = -\dfrac{ye^x + e^y}{e^x + xe^y}$

۷. $\dfrac{dr}{dQ} = -\dfrac{r(\sin Q + \cos Q)}{r + \sin Q - \cos Q}$

۸. $(e^x\sin y - 2y\sin x)\,dx + (e^x\cos y + 2\cos x)\,dy = 0$

۹. $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x)\,dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = 0$

۱۰. $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)\,dy = 0 \quad , \quad x > 0$

۱۱. $\left(3x^2\tan y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

۱۲. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$

۱۳. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید .

۱۴. $(2rQ - \tan Q)\,dr + r(r - \sec^2 Q)\,dQ = 0 \;,\; r = 1$ وقتی $Q = \frac{\pi}{4}$

۱۵. $\cos Q\,dr - (r\sin Q + 1)\,dQ = 0 \;,\; r = 2$ وقتی $Q = 0$

۱۶. $(2 - xy^2)\,dx - (x^2 y)\,dy = 0 \;,\; x = 2$ وقتی $y = 1$

۱۷. $u(u^2 + v^2)\,du + (v^3 + u^2 v - 1)\,dv = 0 \;,\; u = 1$ وقتی $v = 1$

۱۸. $e^x(y^3 + xy^3 + 1)dx + 3y^2(xe^x - 6)\,dy = 0 \;,\; x = 0$ وقتی $y = 1$

۴.۲. فاکتورهای انتگرال‌گیری

اگر معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (۱)$$

کامل نباشد، یعنی

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ممکن است بتوان تابع مناسبی مانند $F(x,y) \neq 0$ را پیدا کرد بطوری اگر طرفین (۱) را در $F(x,y)$ ضرب کنیم، معادله دیفرانسیل کامل شود. چنین تابعی را **فاکتور انتگرال*** می‌نامند.

یافتن چنین تابعی کار ساده‌ای نیست و قضیه‌ای برای پیدا کردن فاکتور انتگرال در حالت کلی نداریم. در این بخش سعی شده برای حالات خاص، نحوه پیدا کردن فاکتور انگرال بیان شود.

قضیه** ۲.۲. اگر معادلهٔ دیفرانسیل (۱) کامل نباشد و $u(x,y) = c$ جواب عمومی آن باشد آنگاه یک فاکتور انتگرال برای آن یافت می‌شود (حتی بی‌نهایت از این فاکتور انتگرال‌ها)

---

* *Integrating Factor*

** *Erwin Kreyszig , Advanced Engineering Mathematics , 4d ed. p.31 New York: Wiley*

اثبات. از طرفین

$$u(x,y) = c$$

دیفرانسیل می‌گیریم

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0 \qquad (۲)$$

با مقایسه (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{1}{P} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{1}{Q}$$

اگر نسبت مشترک را $F(x,y) \neq 0$ بگیریم، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = FQ \;,\; \frac{\partial u}{\partial x} = FP$$

با ضرب $F(x,y) \neq 0$ در طرفین (۱)، داریم

$$FP\,dx + FQ\,dy = 0 \qquad (۳)$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \qquad (۴)$$

با توجه به (۲) و (۳) و (۴)، نتیجه می‌گیریم

$$du = FP\,dx + FQ\,dy \qquad (۵)$$
$$= F(P\,dx + Q\,dy)$$

و این بدان معنی است، که F یک فاکتور انتگرال (۱) می‌باشد.

اگر طرفین (۵) را در تابعی مانند $k(u)$ ضرب کنیم، داریم

$$k(u)\,du = k(u)F(P\,dx + Q\,dy)$$

که یک معادلهء کامل است. بنابراین $k(u)F$ نیز یک فاکتور انتگرال دیگر می‌باشدوچون k تابعی دلخواه‌از u می‌باشد، پس بی‌نهایت فاکتور انتگرال برای (۱)، داریم

مثال ۲۸.۲. معادلهء دیفرانسیل

$$x\,dy - y\,dx = 0 \qquad (۱)$$

کامل نیست، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

اگر طرفین (۱) را در

$$\frac{1}{x^2}$$

ضرب کنیم، داریم

$$\frac{1}{x}\,dy - \frac{y}{x^2}\,dx = 0 \qquad (۲)$$

معادله (۲) کامل است، چون

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \; , \; \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

پس یک فاکتور انتگرال، معادله (۱)

$$F = \frac{1}{x^2}$$

می‌باشد.
حال اگر طرفین (۱) را در

$$\frac{1}{y^2}$$

ضرب کنیم، داریم

$$\frac{x}{y^2}\,dy - \frac{1}{y}\,dx = 0 \qquad (۳)$$

معادله (۳) کامل است، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \; , \; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$$

یعنی یک فاکتور انتگرال دیگر، معادله (۱)

$$F = \frac{1}{y^2}$$

می‌باشد.
همچنین اگر طرفین (۱) را در

$$\frac{1}{xy}$$

ضرب کنیم، داریم

$$\frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{x}\,dx = 0 \qquad (۴)$$

معادله (۴) کامل است، زیرا

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \; , \; \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

پس

$$F = \frac{1}{xy}$$

نیز یک فاکتور انتگرال برای (۱) می‌باشد.

توجه. در این مثال، نشان دادیم که یک معادله بیش از یک فاکتور انتگرال دارد و در ضمن فاکتور انتگرال ممکن است تابعی تنها از x و یا تابعی تنها از y باشد.

مثال ۲۹.۲. نشان دهید که

$$F = x^2y^3$$

یک فاکتور انتگرال، معادله

$$4x\,dy + 3y\,dx = 0 \qquad (۱)$$

می‌باشد.

حل. طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$4x^3y^3dy + 3x^2y^4dx = 0 \qquad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x^2y^3 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^2y^3$$

مثال ۲.۳۰. نشان دهید که

$$F = \frac{y+1}{x^4}$$

یک فاکتور انتگرال، برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$3(y+1)\,dx - 2x\,dy = 0 \qquad (۱)$$

می‌باشد. و سپس آنرا حل کنید.

حل. طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$3\frac{(y+1)^2}{x^4}\,dx - 2\frac{y+1}{x^3}\,dy = 0 \qquad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6\frac{y+1}{x^4} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6\frac{y+1}{x^4}$$

پس، معادله (۲) کامل است. حال معادله (۲) را حل می‌کنیم *

---

* توضیح. هرگاه معادله دیفرانسیل

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (آ)$$

کامل نباشد و F یک فاکتور انتگرال این معادله باشد در این صورت می‌دانیم،

$$u = \int P\,dx + f(y)$$

$$= \int 3\frac{(y+1)^2}{x^4}\,dx + f(y)$$

$$= -\frac{(y+1)^2}{x^3} + f(y) \qquad (۳)$$

برای پیدا کردن $f(y)$، از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{y+1}{x^3} + \frac{df(y)}{dy} = -2\frac{y+1}{x^3}$$

یا

$$\frac{df(y)}{dy} = 0 \qquad (۴)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین (۴) داریم

$$f(y) = c.$$

در (۳)، بجای $f(y)$ مقدار می‌گذاریم

$$\frac{(y+1)^2}{x^3} = c \qquad (۵)$$

معادلهٔ

$$FP\,dx + FQ\,dy = 0 \qquad (ب)$$

کامل است. برای حل معادله (آ)، معادلهٔ دیفرانسیل (ب) را حل می‌کنیم. فرض کنید جواب معادله (ب)، $u(x,y)=c$ باشد. چون معادله (ب) به‌فرم

$$F(P\,dx + Q\,dy) = 0 \qquad (پ)$$

است و چون $u(x,y)=c$ جواب این معادله می‌باشد، در نتیجه در (پ) صدق می‌کند. از طرفی می‌دانیم که F صفر نیست؛ پس باید $u(x,y)=c$ در معادله $P\,dx+Q\,dy=0$ صدق کند و این بدان معنی است که $u(x,y)=c$ جواب معادله (آ) نیز می‌باشد.

(۵) جواب عمومی معادله (۱) می‌باشد.

مثال ۲.۳۱. نشان دهید که

$$F = \sec^2 xy$$

یک فاکتور انتگرال، برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(\sin xy \cos xy + xy)\,dx + x^2 dy = 0 \qquad (۱)$$

می‌باشد، و سپس آنرا حل کنید.

حل. طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم. داریم

$$(\tan xy + xy \sec^2 xy)\,dx + x^2 \sec^2 xy\, dy = 0 \qquad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \sec^2 xy + x \sec^2 xy + 2x^2 y \sec^2 xy \tan xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sec^2 xy + 2x^2 y \sec^2 xy \tan xy$$

در نتیجه معادله (۲) کامل است. و معادلهٔ (۲) را حل می‌کنیم، جواب بدست آمده، جواب (۱) نیز خواهد بود.

$$u = \int x^2 \sec^2 xy\, dy + f(x)$$
$$= x \tan xy + f(x) \qquad (۳)$$

از طرفین (۳) نسبت به، x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan xy + xy \sec^2 xy + \frac{df(x)}{dx}$$
$$= \tan xy + xy \sec^2 xy$$

یا

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad (۴)$$

از طرفین (۴)، انتگرال می‌گیریم

$$f(x) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(x)$، مقدار می‌گذاریم، داریم

$$x \tan xy = c .$$

توجه: برای تعیین فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 . \qquad (۶)$$

حالات خاص زیر را بررسی می‌کنیم. فرض کنید (۶) دارای فاکتور انتگرال $F(x,y) \neq 0$ باشد؛ در اینصورت باید

$$FP\,dx + FQ\,dy = 0 \qquad (۷)$$

کامل باشد، یعنی

$$\frac{\partial (FP)}{\partial y} = \frac{\partial (FQ)}{\partial x}$$

یا

$$F\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial x} \qquad (۸)$$

طرفین (۸) را بر F تقسیم می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\frac{\partial \ln F}{\partial x} - P\frac{\partial \ln F}{\partial y} \qquad (۹)$$

الف: اگر

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$$

باشد در اینصورت معادلهٔ دیفرانسیل (۶) دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(x) = e^{\int f(x)dx}$$

خواهد بود.

اثبات. فرض‌کنید، معادله (۶) دارای فاکتور انتگرالی به‌فرم تابعی تنها از x، مانند

$F(x)$ باشد در اینصورت (۹) به‌فرم زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\,\frac{d\,Ln F}{dx}$$

یا

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{d\,Ln F}{dx} \qquad (۱۰)$$

طرف راست (۱۰) فقط تابع x ، می‌باشد پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از x باشد، مانند $f(x)$

$$\frac{d\,Ln F}{dx} = f(x)$$

با انتگرال‌گیری، از طرفین رابطه بالا داریم

$$Ln\,F = \int f(x)\,dx$$

یا

$$F = e^{\int f(x)dx}$$

مثال ۲.۳۲.. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \;, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$$

پس معادلهٔ دیفرانسیل کامل نیست

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

$$F = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2 Ln x}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

طرفین معادله (۱) را در $1/x^2$ ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\,\frac{y}{x}\,dy = 0 \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم که معادله (۲)، کامل است

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\,\frac{y}{x^2} \;, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2\,\frac{y}{x^2}$$

و معادلهٔ دیفرانسیل (۲) را حل می‌کنیم

$$u = \int -\frac{2y}{x}\,dy + f(x)$$

$$= -\frac{y^2}{x} + f(x) \qquad (۳)$$

از طرفین (۳) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

یا

$$f(x) = Ln\,x$$

در (۳) بجای $f(x)$ ، مقدار می‌گذاریم

$$-\frac{y^2}{x} + Ln\,x = c.$$

ب: اگر

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -f(y)$$

باشد. در اینصورت معادلهٔ دیفرانسیل (۶) دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(y)=e^{\int f(y)dy}$$

خواهد بود.

اثبات. اگر معادلهٔ دیفرانسیل (۶)، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم تابعی، تنها از y، مانند، $F(y)$ باشد در اینصورت (۹) به‌فرم زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=-P\frac{d\,Ln F}{dy}$$

یا

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{d\,Ln F}{dy}$$

طرف راست عبارت بالا، فقط تابع، y می‌باشد. پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از y، مانند $f(y)$ باشد

$$\frac{d\,Ln F}{dy}=f(y)$$

یا

$$Ln F=\int f(y)\,dy$$

$$F=e^{\int f(y)dy}$$

مثال ۲.۳۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y(1+xy)\,dx-x\,dy=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+2xy \;,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2(1+xy)}{y(1+xy)}$$

$$=\frac{2}{y}$$

$$F=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2Ln\,y}$$

$$=\frac{1}{y^2}$$

طرفین معادله (۱) را در $1/y^2$ ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0 \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم که معادله (۲)، کامل است

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2} \;,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$$

معادله (۲) را حل می‌کنیم.

$$u=\int\left(\frac{1}{y}+x\right)dx+f(y)$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2+f(y) \qquad (۳)$$

از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}+\frac{df(y)}{dy}=-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{df(y)}{dy}=0$$

یا

$$f(y)=c_1$$

در (۳)، بجای $f(y)$، مقدار می‌گذاریم.

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=c.$$

پ: اگر

$$\frac{1}{yQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(xy)$$

باشد. در اینصورت معادلهٔ دیفرانسیل (۶) دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(Z)=e^{\int f(z)dz} \qquad , \quad Z=xy$$

خواهد بود.

اثبات. اگر معادله (۶)، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم، تابعی از $Z=xy$ ، مانند $F(Z)$ باشد در اینصورت (۹) به‌فرم زیر درمی‌آید؛

$$\frac{\partial Ln F(z)}{\partial x}=\frac{F'(z)}{F(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\,\frac{F'(z)}{F(z)}=y\frac{d}{dz}\,Ln F(z)$$

$$\frac{\partial Ln F(z)}{\partial y}=\frac{F'(z)}{F(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x\,\frac{F'(z)}{F(z)}=x\frac{d}{dz}\,Ln F(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=(Qy-Px)\frac{d}{dz}Ln F(z)$$

یا

$$\frac{1}{yQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{d}{dz}Ln F(z)$$

طرف راست عبارت بالا، فقط تابع $Z=xy$ می‌باشد. پس باید طرف چپ، نیز تابعی تنها از xy ، باشد مانند، $f(xy)$.

$$\frac{d}{dz}\,Ln F(z)=f(z)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا، داریم

$$Ln F(z)=\int f(z)\,dz$$

یا

$$F(z)=e^{\int f(z)dz}.$$

مثال ۳۴.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(y+x^4y^2)\,dx+x\,dy=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+2x^4y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1$$

$$\frac{1}{yQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2x^4y}{xy-xy-x^5y^2}=-\frac{2}{xy}$$

$$F=e^{-2\int\frac{dz}{z}}=e^{-2\,Ln\,z}$$

$$=\frac{1}{z^2}$$

پس، معادله (۱) دارای فاکتور انتگرال

$$F=\frac{1}{x^2y^2}$$

می‌باشد.

طرفین (۱) را در $1/x^2y^2$ ، ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{1}{x^2y}+x^2\right)dx+\frac{1}{xy^2}\,dy=0 \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم، معادله (۲) کامل است.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{x^2y^2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{x^2y^2}$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۲) را حل می‌کنیم.

$$u = \int \left(\frac{1}{x^2 y} + x^2 \right) dx + f(y)$$

$$= -\frac{1}{xy} + \frac{1}{3} x^3 + f(y) \qquad (۳)$$

از طرفین (۳)، نسبت به y ، مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

$$f(y) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(y)$ ، مقدار می‌گذاریم.

$$-\frac{1}{xy} + \frac{x^3}{3} = c.$$

ت: اگر

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xQ - yP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x^2 + y^2)$$

باشد. در اینصورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۶)، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(z) = e^{\int f(z) dz} \quad , \quad z = x^2 + y^2$$

خواهد بود.

اثبات. اگر معادله (۶)، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم تابعی از $z = x^2 + y^2$ ، مانند $F(z)$ باشد در اینصورت (۹) به‌فرم زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial Ln\, F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{F'(z)}{F(z)} = 2x \frac{d}{dz} Ln\, F(z)$$

$$\frac{\partial Ln\, F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{F'(z)}{F(z)} = 2y \frac{d}{dz} Ln\, F(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(xQ - yP) \frac{d}{dz} Ln\, F(z)$$

یا

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xQ - yP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{d}{dz} Ln\, F(z)$$

طرف راست عبارت بالا، تابعی تنها از z ، می‌باشد. پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از z ، مانند $f(z)$ باشد.

$$\frac{d}{dz} Ln\, F(z) = f(z)$$

$$Ln\, F(z) = \int f(z) dz$$

$$F(z) = e^{\int f(z) dz}.$$

مثال ۳۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$(x - xy) dx + (y + x^2) dy = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xQ - yP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{-3x}{2(x^3 + xy^2)} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$F = e^{-3/2 \int \frac{dz}{z}} = e^{-3/2 Ln\, z} = \frac{1}{z^{3/2}}$$

$$F = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

طرفین معادله (۱) را در F ، ضرب می‌کنیم، داریم

$$\frac{x - xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = 0 \qquad (۲)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۲) کامل است و جواب عمومی آن بصورت زیر می‌باشد.

$$\frac{y-1}{\sqrt{x^2 y^2}} = c$$

ث : اگر

$$\frac{y^2}{xP+yQ}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

باشد. در اینصورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۹)، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(z)=e^{\int f(z)dz}, \quad z=\frac{x}{y}$$

خواهد بود.

اثبات. فرض کنید معادله (۶) دارای فاکتور انتگرال به‌فرم تابعی از $z=x/y$ باشد. مانند $F(z)$ در اینصورت (۹) به‌فرم زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial Ln\, F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\cdot\frac{d}{dz}Ln\, F(z)$$

$$\frac{\partial Ln\, F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{d}{dz}Ln\, F(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{1}{y}Q+\frac{x}{y^2}P\right)\frac{d}{dz}Ln\, F(z)$$

یا

$$\frac{y^2}{yQ+xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{d}{dz}Ln\, F(z)$$

طرف راست عبارت بالا، تابعی تنها از $z=x/y$ می‌باشد. پس باید طرف چپ نیز تابعی تنها از z باشد، مانند $f(z)$

$$\frac{d}{dz}Ln\, F(z)=f(z)$$

$$Ln\, F(z)=\int f(z)\,dz$$

$$F(z)=e^{\int f(z)dz}$$

مثال ۲.۳۶. معادله دیفرانسیل

$$4y^2dx - xy\,dy=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=8y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-y$$

$$\frac{y^2}{xP+yQ}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{y^2}{4xy^2-xy^2}(9y)=3\frac{y}{x}$$

با فرض[1] $z=x/y$

$$F=e^{3\int\frac{dz}{z}}=e^{3Ln z}=z^3$$

یا

$$F=\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

طرفین معادله (۱) را در F ، ضرب می‌کنیم

$$4x^3y^{-1}dx - x^4y^{-2}dy=0 \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم که معادله (۲) کامل است.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-4x^3y^{-2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-4x^3y^{-2}$$

معادله دیفرانسیل کامل را حل می‌کنیم

$$u=\int 4x^3y^{-1}dx+f(y)$$
$$=x^4y^{-1}+f(y) \qquad (۳)$$

از طرفین (۳)، نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^4y^{-2}+\frac{df(y)}{dy}=-x^4y^{-2}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

$$f(y) = c_1$$

در (۳)، بجای $f(y)$، مقدار می‌گذاریم

$$x^4 y^{-1} = c$$

ج: اگر

$$\frac{x^2}{xP+yQ}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$$

باشد، در اینصورت معادله دیفرانسیل (۶)، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(z) = e^{\int f(z)\,dz}, \quad z = y/x$$

خواهد بود.

اثبات. مشابه با حالت "ث" می‌باشد. (تمرین شماره (۲۰)

چ: اگر معادلهٔ دیفرانسیل (۶)، همگن باشد، دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F(x,y) = \frac{1}{xP+yQ}$$

خواهد بود. البته اگر $xP+yQ \neq 0$ باشد

اثبات. می‌دانیم اگر معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

همگن باشد، آنگاه می‌توان آنرا به‌فرم

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{۱۱}$$

نوشت. کافیست نشان دهیم (۱۱) دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F = \left(y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)^{-1} \tag{۱۲}$$

می‌باشد. ابتدا (۱۱) را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$f\left(\frac{y}{x}\right)dx - dy = 0 \tag{۱۳}$$

طرفین (۱۳) را در F ضرب می‌کنیم

$$\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{y - xf\left(\frac{y}{x}\right)}\,dx - \frac{1}{y - xf\left(\frac{y}{x}\right)}\,dy = 0 \tag{۱۴}$$

نشان می‌دهیم (۱۴) کامل است

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)\left[y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right] - \left[1 - f'\left(\frac{y}{x}\right)\right] f\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - f\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2} \tag{۱۵}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - f\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(y - xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2} \tag{۱۶}$$

با مقایسه (۱۵) و ۱۶)، نتیجه می‌گیریم که (۱۴) کامل است و در نتیجه (۱۲)، فاکتور انتگرال (۱۱) می‌باشد*

مثال ۲.۳۷. یک فاکتور انتگرال برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(3x^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0 \qquad (۱)$$

پیدا کنید.

حل. معادلهٔ (۱)، همگن می‌باشد لذا

$$F = \frac{1}{xP + yQ} = \frac{1}{3x^3}$$

طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{3x^2}\right)dx + \frac{1}{3x}\,dy = 0 \qquad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{3x^2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{3x^2}$$

ح: اگر معادلهٔ دیفرانسیل (۶) به‌فرم زیر باشد

$$yf_1(xy)\,dx + xf_2(xy)\,dy = 0$$

آنگاه دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

---

*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow -f\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$$

و

$$\frac{1}{xP + yQ} = \frac{1}{y - xf\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$F = \frac{1}{xy\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)}$$

خواهدبود. البته‌باید $f_1(xy) \neq f_2(xy)$ باشد

اثبات. طرفین معادله را در F ضرب می‌کنیم

$$\frac{yf_1(xy)}{xy\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)}dx + \frac{xf_2(xy)}{xy\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)}dy = 0$$

شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1(xy)}{x\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)}\right) =$$

$$\frac{x^2 f_1'(xy)\left[f_1(xy) - f_2(xy)\right] - xf_1(xy)\left[xf_1'(xy) - xf_2'(xy)\right]}{x^2\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)^2}$$

$$= \frac{f_1(xy)f_2'(xy) - f_2(xy)f_1'(xy)}{\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)^2}$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2(xy)}{y\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)}\right) =$$

$$\frac{y^2 f_2'(xy)\left[f_1(xy) - f_2(xy)\right] - y^2 f_2(xy)\left[f_1'(xy) - f_2'(xy)\right]}{y^2\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)^2}$$

$$= \frac{f_1(xy)f_2'(xy) - f_2(xy)f_1'(xy)}{\left(f_1(xy) - f_2(xy)\right)^2}$$

با مقایسه (a) و (b)، نتیجه می‌گیریم که F، یک فاکتور انتگرال معادله می‌باشد

مثال ۲.۳۸. معادله دیفرانسیل

$$(2y + 3xy^2)\,dx + (x + 2x^2y)\,dy = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل . معادله به‌فرم

$$y(2+3xy)\,dx + x(1+2xy)\,dy = 0$$

می‌باشد ، لذا دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F = \frac{1}{xy(2+3xy-1-2xy)}$$

$$= \frac{1}{xy(1+xy)}$$

می‌باشد . طرفین معادله (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$\frac{2+3xy}{x(1+xy)}\,dx + \frac{1+2xy}{y(1+xy)}\,dy = 0 \qquad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2(1+xy) - x^2(2+3xy)}{x^2(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y^2(1+xy) - y^2(1+2xy)}{y^2(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

پس معادله‌ی (۲) کامل می‌باشد .

$$u = \int \frac{2+3xy}{x(1+xy)}\,dx + f(y)$$

$$= 2\int \frac{1+2xy}{x(1+xy)}\,dx - \int \frac{y}{1+xy}\,dx + f(y)$$

$$= 2\,Ln\,x(1+xy) - Ln(1+xy) + f(y)$$

$$= Ln\,x^2 + Ln(1+xy) + f(y) \qquad (۳)$$

از طرفین (۳) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+xy} + \frac{df(y)}{dy} = \frac{1+2xy}{y(1+xy)}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$f(y) = Ln\,y$$

در (۳) ، بجای $f(y)$ ، مقدار می‌گذاریم

$$Ln\,x^2 + Ln(1+xy) + Ln\,y = Ln\,c$$

$$x^2y(1+xy) = c$$

خ: اگر معادله دیفرانسیل به‌فرم

$$y(Kx^ay^b + Lx^cy^d)\,dx + x(Mx^ay^b + Nx^cy^d)\,dy = 0 \qquad (۱۷)$$

باشد ، آنگاه معادله دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F = x^\alpha y^\beta$$

خواهدبود .البته‌اگر $KN - ML \neq 0$ باشد .

و α و β از حل دستگاه زیر بدست می‌آیند

$$\begin{cases} K(\beta+b+1) = M(\alpha+a+1) \\ L(\beta+d+1) = N(\alpha+c+1) \end{cases}$$

(K و L و M و N ، مقادیر ثابت می‌باشند)

مثال ۳۹.۲. یک فاکتور انتگرال برای معادله‌ء دیفرانسیل

$$y(4x+3y^3)\,dx + x(2x+5y^3)\,dy = 0 \qquad (۱)$$

پیدا کنید .

حل . چون

$$KN - ML = 20 - 6 \neq 0$$

است ، لذا معادله دارای فاکتور انتگرال به‌فرم

$$F = x^\alpha y^\beta$$

می‌باشد که α و β از حل دستگاه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} 4(\beta+0+1) = 2(\alpha+1+1) \\ 3(\beta+3+1) = 5(\alpha+0+1) \end{cases}$$

$$\alpha = 2 \quad , \quad \beta = 1$$

$$F = x^2y$$

طرفین معادله (۱) را در x^2y ضرب می‌کنیم و نشان می‌دهیم که F یک فاکتور انتگرال برای (۱) می‌باشد

$$(4x^3y^2+3x^2y^5)\,dx+(2x^4y+5x^3y^4)\,dy=0 \qquad (۲)$$

شرط کامل بودن را برای (۲) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y}=8x^3y+15x^2y^4$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=8x^3y+15x^2y^4$$

تذکر. چون بخاطر سپردن فرم معادله و دستگاه ممکن است مشکل باشد، برای تعیین فاکتور انتگرال، معادله را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می‌کنیم، سپس شرط کامل بودن را برقرار می‌سازیم

مثال ۴۰.۲. یک فاکتور انتگرال برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y(2-3xy)\,dx-x\,dy=0$$

پیدا کنید.

حل. طرفین معادله را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می‌کنیم

$$(2x^\alpha y^{\beta+1}-3x^{\alpha+1}y^{\beta+2})\,dx-x^{\alpha+1}y^\beta\,dy=0$$

شرط کامل بودن را برقرار می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2(\beta+1)x^\alpha y^\beta-3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-(\alpha+1)x^\alpha y^\beta$$

شرط کامل بودن به شرح زیر است.

$$2(\beta+1)x^\alpha y^\beta-3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}=-(\alpha+1)x^\alpha y^\beta$$

ضرایب جملات متشابه را مساوی قرار می‌دهیم

$$2(\beta+1)=-(\alpha+1) \quad , \quad \beta+2=0$$

$$\beta=-2 \quad , \quad \alpha=1$$

$$F=xy^{-2}$$

مثال ۴۱.۲. برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^2+y^2+1)\,dx-2xy\,dy=0$$

یک فاکتور انتگرال به‌فرم تابعی از $z=(y^2-x^2)$، پیدا کنید.

حل. فرض کنید $F(z)$ یک فاکتور انتگرال معادله باشد. با توجه به (۹)، داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=Q\frac{\partial Ln F}{\partial x}-P\frac{\partial Ln F}{\partial y} \qquad (۵)$$

از طرفی

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$$

$$\frac{\partial Ln F}{\partial x}=\frac{F'(z)}{F(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-2x\,\frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{\partial Ln F}{\partial y}=\frac{F'(z)}{F(z)}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2y\,\frac{F'(z)}{F(z)}$$

در (۵) جای‌گذاری می‌کنیم،

$$4y=4x^2y\frac{F'(z)}{F(z)}-(x^2+y^2+1)(2y)\frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{2}{x^2-y^2-1}=\frac{-2}{z+1}$$

$$Ln F(z)=-2Ln(z+1)$$

$$F(z)=\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$$

مثال ۴۲.۲. برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0$$

یک فاکتور انتگرال به‌فرم تابعی از $z = x + y^2$، پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $F(z)$ یک فاکتور انتگرال معادله باشد، با توجه به (۹)، داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\frac{\partial Ln\,F}{\partial x} - P\frac{\partial Ln\,F}{\partial y} \qquad (\bullet)$$

از طرفی

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y$$

$$\frac{\partial Ln\,F(z)}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{\partial Ln\,F(z)}{\partial y} = \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{F'(z)}{F(z)}$$

در $(\bullet)$ جای‌گذاری می‌کنیم

$$12y = (2y^3 - 6xy)\frac{F'(z)}{F(z)} - 2y(3y^2 - x)\frac{F'(z)}{F(z)}$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{-3}{y^2+x} = \frac{-3}{z}$$

$$Ln\,F(z) = -3\,Ln\,z$$

$$F(z) = \frac{1}{z^3}$$

$$= \frac{1}{(x+y^2)^3}$$

مجموعه مسائل ۴.۲

با پیدا کردن فاکتور انتگرال، معادله‌های زیر را حل کنید.

۱. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$

۲. $(x^4y^2 - y)\,dx + (x^2y^4 - x)\,dy = 0$

۳. $y(2x + y^3)\,dx - x(2x - y^3)\,dy = 0$

۴. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$

۵. $e^x(x+1)\,dx + (ye^y - xe^x)\,dy = 0$

۶. $y(y + 2x + 1)\,dx - x(2y + x - 1)\,dy = 0$

۷. $3(y+x)^2\,dx + x(3y + 2x)\,dy = 0$

۸. $(x + \sin x + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$

۹. $(x^4 Ln\,x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$

۱۰. $y' = e^{2x} + y - 1$

۱۱. $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0$

۱۲. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$

۱۳. $e^x\,dx + (e^x\cot y + 2y\csc y)\,dy = 0$

۱۴. $\left(3x + \frac{6}{y}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)dy = 0$

۱۵. $(xy - 2y^2)\,dx - (x^2 - 3xy)\,dy = 0$

۱۶. $y\,dx + x(x^2y - 1)\,dy = 0$

۱۷. $(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$

۱۸. $(y + Ln\,x)\,dx - x\,dy = 0$

۱۹. $y(y^2 - 2x^2)\,dx + x(2y^2 - x^2)\,dy = 0$

۲۰. حالت "ج" را اثبات کنید.

۲.۵. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

تعریف ۲.۴. اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان به‌فرم

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y + c(x) = 0$$

نوشت، آن را **خطی** گوییم. در فاصله‌ای که $A(x) \neq 0$ باشد، می‌توانیم طرفین را بر $A(x)$ تقسیم کنیم.

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = q(x) \qquad (۱)$$

اگر در (۱) $q(x) \equiv 0$ باشد، معادله را همگن و در غیر اینصورت آنرا ناهمگن نامند.

در زیر به‌بررسی روشی جهت پیدا کردن فرمولی برای جواب عمومی معادله (۱) می‌پردازیم.

فرض کنید $q(x), f(x)$ هر دو در فاصله I پیوسته باشند. جواب عمومی را نیز در این فاصله پیدا می‌کنیم.

روش اول: اگر معادله (۱) همگن باشد.

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \qquad (۲)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد. با انتگرال‌گیری از طرفین (۲)، داریم

$$Ln\,y = -\int f(x)\,dx + c_1$$

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}$$

اگر معادله (۱) ناهمگن باشد، ابتدا آنرا به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(yf(x) - q(x))dx + dy = 0 \qquad (۳)$$

معادله (۳) در حالت کلی از نوع متغیرهای از هم جدا و همگن نیست، لذا شرط کامل بودن را برای (۳) بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x) \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

در نتیجه در حالت کلی، معادله (۳) کامل هم نیست نشان می‌دهیم که معادله (۱) دارای فاکتور انتگرال به‌فرم تابعی تنها از x می‌باشد

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$$

و با توجه به‌مطالب بیان شده در قسمت "الف" بخش قبل، داریم

$$F = e^{\int f(x)dx}$$

طرفین (۱) را در F ضرب می‌کنیم

$$e^{\int f(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + yf(x)\right) = q(x)\,e^{\int f(x)dx} \qquad (۴)$$

و چون

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int f(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx}\,e^{\int f(x)dx} + y\,f(x)\,e^{\int f(x)dx} \qquad (۵)$$

با توجه به (۵) ، (۴) به‌فرم زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int f(x)dx}\right) = q(x)\, e^{\int f(x)dx} \qquad (۶)$$

از طرفین (۶) نسبت به x انتگرال می‌گیریم ، داریم

$$y\, e^{\int f(x)dx} = \int q(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx + c$$

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int q(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx + c\right] \qquad (۷)$$

با فرض

$$g(x) = \int f(x)\, dx$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول (۱) ، به‌فرم

$$y = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\, e^{g(x)}\, dx + c\right] \qquad (۸)$$

می‌باشد .

مثال ۴۳.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + 2y = e^{x}$$

را حل کنید.

حل. با مقایسه این معادله با (۱) ، داریم

$$f(x) = 2 \quad , \quad q(x) = e^{x}$$

با انتگرال‌گیری از $f(x)$ داریم

$$g(x) = \int 2\, dx = 2x$$

جواب عمومی به‌فرم (۸) می‌باشد

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{x} e^{2x}\, dx + c\right]$$

$$= e^{-2x}\left(\frac{1}{3} e^{3x} + c\right)$$

$$= \frac{1}{3} e^{x} + c\, e^{-2x}$$

مثال ۴۴.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' - xy = x \quad , \quad y(0) = 0$$

را حل کنید.

حل.

$$f(x) = -x \quad , \quad q(x) = x$$

$$g(x) = \int -x\, dx = -\frac{1}{2} x^2$$

با توجه به (۸) ، جواب عمومی معادله به‌فرم

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2}\left[\int x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + c\right]$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2} + c\right]$$

$$= -1 + c\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

با توجه به‌شرط اولیه ، $y(0) = 0$ داریم

$$0 = -1 + c$$

$$c = 1$$

در جواب عمومی بجای c ، مقدار می‌گذاریم

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

مثال ۴۵.۲. معادله دیفرانسیل

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = 3x \sec x$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم (۱) می‌نویسیم ، با تقسیم طرفین بر $\tan x$ ، داریم

$$y' + y\cot x = 3x\csc x$$

$$f(x) = \cot x \quad , \quad q(x) = 3x\csc x$$

$$g(x) = \int \cot x\,dx = Ln\sin x$$

با توجه به (۸) ، جواب عمومی معادله به‌فرم

$$y = e^{-Ln\sin x}\left[\int 3x\csc x\, e^{Ln\sin x}\,dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[\int 3x\csc x\sin x\,dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[\int 3x\,dx + C\right]$$

$$= \frac{3}{2}x^2\csc x + C\csc x$$

روش دوم : روش تغییر پارامتر . برای حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱) ،
ابتدا معادلهٔ همگن متناظر را حل می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx$$

معادله بالا از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد و جواب آن به‌صورت

(۹) $$y = c\,e^{-\int f(x)dx}$$

است که در (۹) ، c عدد ثابت دلخواه می‌باشد . و (۹) جواب عمومی معادله همگن متناظر است که این جواب در معادلهٔ غیر همگن (۱) صدق نخواهد کرد . ولی اگر c رابعنوان‌تابعی از x فرض کنیم ، آنگاه می‌توانیم این تابع ($c(x)$) را چنان تعیین

کنیم که (۹) در (۱) صدق کند
برای تعیین $c(x)$ از طرفین (۹) نسبت به x مشتق می‌گیریم ، داریم

(۱۰) $$\frac{dy}{dx} = c'(x)e^{-\int f(x)dx} - c(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}$$

(۱۰) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$c'(x)e^{-\int f(x)dx} - c(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + c(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} = q(x)$$

یا

(۱۱) $$c'(x) = q(x)e^{\int f(x)dx}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x از طرفین (۱۱) ، داریم

(۱۲) $$c(x) = \int q(x)e^{\int f(x)dx}\,dx + \lambda$$

در (۹) ، بجای c ، (۱۲) را قرار می‌دهیم ، جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

(۱۳) $$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int f(x)dx}\,dx + \lambda\right)$$

که همان (۷) می‌باشد .

مثال ۴۶.۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -2\,dx \qquad (۲)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم‌جـــدا می‌باشند از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$Ln\, y = -2x + c_1$$

$$y = Ce^{-2x} \qquad (۳)$$

در (۳)، C را بعنوان تابعی از x چنان تعیین می‌کنیـم که (۳) در (۱) صدق کند. از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} \qquad (۴)$$

در (۱) بجای dy/dx، (۴) را و بجای y، (۳) را قرار می‌دهیم، داریم

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = x^2 + 2x$$

$$C'(x) = (x^2 + 2x)e^{2x}$$

$$C(x) = \int (x^2 + 2x)e^{2x}\,dx + \lambda$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \lambda \qquad (۵)$$

در (۳) بجای C، (۵) را قرار می‌دهیم، جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x}$$

مثال ۲.۴۷. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{3}{2}x \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم

$$y' - \frac{1}{2x}y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \qquad (۲)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد. از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$Ln\, y = \frac{1}{2}Ln\, x + Ln\, c$$

$$y = Cx^{1/2} \qquad (۳)$$

حال C را بعنوان تابعی از x چنان تعیین می‌کنیم کـه (۳) در (۱) صدق کند. برای اینکار از طرفین (۳) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$y' = C'(x)x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}C(x) \qquad (۴)$$

(۳) و (۴) را در (۱) قرار می‌دهیم، داریم

$$C'(x)x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}C(x) - \frac{1}{2x}x^{1/2}C(x) = \frac{3}{2}x$$

$$C'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$C(x) = \frac{3}{2}\int x^{1/2}\,dx + \lambda$$

$$= x^{3/2} + \lambda \qquad (۵)$$

در (۳) بجای C، (۵) راقرار می‌دهیم، جواب عمومی به‌فرم زیر درمی‌آید

$$y = x^2 + \lambda x^{1/2}$$

تذکر (۱): یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x به‌عنوان تابعی از y خطی باشد، و صورت کلی آن به‌فرم

$$\frac{dx}{dy} + xf(y) = q(y) \qquad (۱۴)$$

می‌باشد . جواب عمومی (۱۴) به‌فرم (۸) است با این تفاوت که جای x با y عوض می‌شود و جواب عمومی (۱۴) به‌فرم

$$x = e^{-g(y)}\left[\int q(y)\, e^{g(y)}\, dy + c\right] \qquad (۱۵)$$

که در آن

$$g(y) = \int f(y)\, dy$$

می‌باشد .

مثال ۴۸.۲ . معادله دیفرانسیل

$$y'(x \sin y + 2 \sin 2y) = 1$$

را حل کنید .

حل .

$$x \sin y + 2 \sin 2y = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} - x \sin y = 2 \sin 2y \qquad (۱)$$

معادله (۱) ، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی نسبت به x به‌عنوان تابعی از y می‌باشد

$$f(y) = -\sin y \quad , \quad q(y) = 2 \sin 2y$$

$$g(y) = \int f(y)\, dy$$
$$= -\int \sin y\, dy$$
$$= \cos y$$

با توجه به (۱۵) ، جواب عمومی معادله به‌صورت

$$x = e^{-\cos y}\left[\int 2 \sin 2y\, e^{\cos y}\, dy + C\right]$$
$$= e^{-\cos y}\left[4 \int \sin y \cos y\, e^{\cos y}\, dy + C\right]$$
$$= e^{-\cos y}\left[-4 \cos y\, e^{\cos y} + 4 e^{\cos y} + C\right]$$
$$= -4 \cos y + 4 + C e^{-\cos y}$$

مثال ۴۹.۲ . معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{y}{2y\, Ln\, y + y - x}$$

را حل کنید .

حل .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y(2\, Lny + 1) - x}{y}$$
$$= 2\, Lny + 1 - \frac{x}{y}$$

یا

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2\, Lny + 1 \qquad (۱)$$

معادله (۱) ، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی نسبت به x به‌عنوان تابعی از y می‌باشد

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad , \quad q(y) = 2\, Lny + 1$$

$$g(y) = \int f(y)\, dy$$
$$= \int \frac{1}{y}\, dy$$
$$= Lny$$

با توجه به (۱۵) ، جواب عمومی عبارت است از

$$x = e^{-Lny}\left[\int (2Ln\, y + 1)\, e^{Lny}\, dy + c\right]$$
$$= \frac{1}{y}\left[\int y(2Ln\, y + 1)\, dy + c\right]$$
$$= \frac{1}{y}\left[\frac{1}{2} y^2 + c + 2 \int yLn\, y\, dy\right]$$

و برای محاسبه $\int yLn\, y\, dy$ به‌طریق زیر عمل می‌کنیم

$$u = Ln\,y \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dy}{y}$$

$$\int y Ln\,y\,dy = \int u\,e^{2u}\,du = \frac{1}{2}\,u\,e^{2u} - \frac{1}{4}\,e^{2u}$$

$$= \frac{1}{2}y^2 Ln\,y - \frac{1}{4}y^2$$

در نتیجه، جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد.

$$x = \frac{c}{y} + y Ln\,y$$

در این قسمت به‌بررسی معادلاتی می‌پردازیم که قابل تبدیل به معادلهٔ دیفرانسیل خطی می‌باشند.

الف : معادلهٔ برنولی . صورت کلی این معادله به‌فرم

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = y^n g(x) \qquad (۱۶)$$

می‌باشد که در آن $n \in R$ ولی n ، صفر یا یک نیست، زیرا اگر $n = 0$ یا $n = 1$ باشد، در اینصورت (۱۶)، به‌فرم (۱) می‌شود که خطی است.

برای حل این معادله، طرفین را y^n تقسیم کرده و تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ می‌دهیم، آنگاه تبدیل به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌شود. زیرا،

$$u = y^{1-n} \quad , \quad \frac{du}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx} \qquad (۱۷)$$

طرفین (۱۶) را بر y^n تقسیم می‌کنیم

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + y^{1-n} f(x) = g(x)$$

طرفین معادله بالا را در $(1-n)$ ضرب می‌کنیم

$$(1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + (1-n)\,y^{1-n} f(x) = (1-n)\,g(x)$$

با توجه به (۱۷)

$$\frac{du}{dx} + (1-n)\,u f(x) = (1-n)\,g(x) \qquad (۱۸)$$

(۱۸) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، نسبت به u به‌عنوان تابعی از x می‌باشد. و با توجه به (۸) جواب عمومی به‌فرم

$$u = y^{1-n} = e^{-\int(1-n)f(x)dx}\left[\int (1-n)\,g(x)\,e^{\int(1-n)f(x)dx}\,dx + C\right] \qquad (۱۹)$$

می‌باشد.

مثال ۲.۵۰. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} - y = x y^2 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. معادلهٔ (۱)، برنولی می‌باشد. لذا طرفین را بر y^2 تقسیم می‌کنیم

$$y^{-2}\,\frac{dy}{dx} - y^{-1} = x \qquad (۲)$$

تغییر متغیر $u = y^{-1}$ می‌دهیم

$$u = y^{-1} \quad , \quad \frac{du}{dx} = -\,y^{-2}\,\frac{dy}{dx} \qquad (۳)$$

با قرار دادن (۳) در (۲) داریم

$$\frac{du}{dx} + u = -x \qquad (۴)$$

معادلهء دیفرانسیل (۴)، معادله خطی مرتبه اول نسبت به‌تابع u می‌باشد. که در آن

$$f(x) = 1 \quad , \quad q(x) = -x$$
$$g(x) = \int f(x)\,dx = \int dx = x$$

و با توجه به (۸)

$$u = e^{-x}\left[\int -x e^{x}\,dx + c\right]$$
$$= e^{-x}\left[(1-x)e^{x} + c\right]$$
$$= 1 - x + c e^{-x}$$

و جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{y} = 1 - x + c e^{-x}.$$

مثال ۵۱۰۲. معادلهء دیفرانسیل

$$(2xy^{5} - y)\,dx + 2x\,dy = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله (۱) را به‌فرم (۱۶) بیان می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -y^{5} \qquad (۲)$$

معادله (۲)، برنولی می‌باشد، طرفین را بر y^{5} تقسیم می‌کنیم

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-4}}{2x} = -1 \qquad (۳)$$

تغییر متغیر $u = y^{-4}$ می‌دهیم

$$u = y^{-4} \quad , \quad \frac{du}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx} \qquad (۴)$$

با قرار دادن (۴) در (۳) داریم

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 4 \qquad (۵)$$

معادلهء دیفرانسیل (۵)، معادلهء دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به تابع u می‌باشد که در آن

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad , \quad q(x) = 4$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = 2\int \frac{dx}{x}$$
$$= 2Ln\,x$$

و با توجه به (۸)

$$u = e^{-2Lnx}\left[\int 4e^{2Lnx}\,dx + c\right]$$
$$= \frac{1}{x^{2}}\left[\int 4x^{2}\,dx + c\right]$$
$$= \frac{1}{x^{2}}\left(\frac{4}{3}x^{3} + c\right)$$
$$= \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^{2}}$$

و جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y^{-4} = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^{2}}.$$

مثال ۵۲۰۲. معادله دیفرانسیل

$$3xy' - 2y = \frac{x^{3}}{y^{2}} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله (۱) را به‌فرم (۱۶) می‌نویسیم

$$y' - \frac{2}{3x}\, y = \frac{x^2}{3}\, y^{-2} \qquad (۲)$$

معادله (۲)، برنولی می‌باشد، طرفین آنرا بر y^{-2} تقسیم می‌کنیم

$$y^2 y' - \frac{2}{3x}\, y^3 = \frac{x^2}{3} \qquad (۳)$$

تغییر متغیر $u = y^3$ می‌دهیم

$$u = y^3 \qquad \frac{du}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx} \qquad (۴)$$

با قراردادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}\, u = x^2 \qquad (۵)$$

معادله دیفرانسیل (۵)، خطی مرتبه اول نسبت به‌تابع u می‌باشد. که در آن

$$f(x) = -\frac{2}{x} \quad , \quad q(x) = x^2$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = -2\int \frac{dx}{x}$$
$$= -2\,Ln x$$

و با توجه به (۸)

$$u = e^{2\,Lnx}\,[\int x^2 e^{-2\,Lnx}\,dx + c]$$
$$= x^2[\int dx + c]$$
$$= x^3 + cx^2$$

و جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y^3 = x^3 + cx^2$$

تذکر (۲): یک معادله‌ء دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x به‌عنوان تابعی از y به‌فرم معادله برنولی باشد. و صورت کلی آن به‌فرم

$$\frac{dx}{dy} + x f(y) = x^n g(y) \qquad (۲۰)$$

است. و جواب عمومی (۲۰) به‌فرم (۱۹) می‌گردد. با این تفاوت که جای x با y عوض می‌شود.

مثال ۵۳.۲. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3 + y + 1}{3x^2}$$
$$= \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(y+1)x^{-2} \qquad (۲)$$

معادله (۲)، برنولی می‌باشد. طرفین را بر x^{-2} تقسیم می‌کنیم

$$x^2 \frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}\, x^3 = \frac{1}{3}(y+1) \qquad (۳)$$

تغییر متغیر $u = x^3$ می‌دهیم

$$u = x^3 \quad , \quad \frac{du}{dy} = 3x^2 \frac{dx}{dy} \qquad (۴)$$

با قرار دادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dy} - u = y + 1 \qquad (۵)$$

معادله دیفرانسیل (۵)، خطی مرتبه اول نسبت به‌تابع u و متغیر y می‌باشد. که در آن

$$f(y) = -1 \quad , \quad q(y) = y + 1$$

$$g(y) = \int f(y)\,dy = -\int dy$$
$$= -y$$

و

$$u = e^{-g(y)}\left[\int q(y)\, e^{g(y)}\, dy + c\right]$$
$$= e^{y}\left[\int (y+1)\, e^{-y}\, dy + c\right]$$
$$= e^{y}\left[-y\, e^{-y} - 2\, e^{-y} + c\right]$$
$$= -y + c\, e^{y} - 2$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$x^3 = -y + c\, e^{y} - 2 .$$

مثال ۲.۵۴. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \cos y + 2 \sin y \cos y}{2x}$$
$$= \frac{1}{2} x \cos y + \frac{1}{x} \sin y \cos y$$

یا

$$\frac{dx}{dy} - x\frac{\cos y}{2} = x^{-1} \sin y \cos y \qquad (۲)$$

معادلهء دیفرانسیل (۲)، برنولی می‌باشد. طرفین را بر x^{-1} تقسیم می‌کنیم

$$x\frac{dx}{dy} - x^2\frac{\cos y}{2} = \sin y \cos y \qquad (۳)$$

تغییر متغیر $u = x^2$ می‌دهیم

$$u = x^2 \quad , \quad \frac{du}{dy} = 2x\frac{dx}{dy} \qquad (۴)$$

با قراردادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dy} - u \cos y = 2 \sin y \cos y \qquad (۵)$$

معادلهء دیفرانسیل (۵)، خطی مرتبه اول نسبت به‌تابع u و متغیر y می‌باشد که‌در آن

$$f(y) = -\cos y \quad , \quad q(y) = 2 \sin y \cos y$$

$$g(y) = \int f(y)\,dy = -\int \cos y\, dy$$
$$= -\sin y$$

و

$$u = e^{-g(y)}\left[\int q(y)\, e^{g(y)}\, dy + C\right]$$
$$= e^{\sin y}\left[2\int \sin y \cos y\, e^{-\sin y}\, dy + C\right]$$
$$= e^{\sin y}\left[-2 \sin y\, e^{-\sin y} - 2\, e^{-\sin y} + C\right]$$
$$= C\, e^{\sin y} - 2(\sin y + 1)$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$x^2 = C\, e^{\sin y} - 2(\sin y + 1) .$$

مثال ۲.۵۵. معادله دیفرانسیل

$$x y' + y = 2x^2\, y\, y'\, Lny \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$y'(x-2x^2y\,Lny)=-y$$

$$y'=-\frac{y}{x-2x^2y\,Lny}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{x-2x^2y\,Lny}{y}$$

$$=-\frac{x}{y}+2x^2\,Lny$$

یا

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=2x^2\,Lny \qquad (۲)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۲)، برنولی می‌باشد. طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$x^{-2}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-1}=2\,Lny \qquad (۳)$$

تغییر متغیر $u=x^{-1}$ می‌دهیم

$$u=x^{-1}\quad,\quad\frac{du}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy} \qquad (۴)$$

با قراردادن (۴) در (۳)، داریم

$$\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}=-2\,Lny \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵)، خطی مرتبه اول، نسبت به تابع U و متغیر y می‌باشد که در آن

$$f(y)=-\frac{1}{y}\quad,\quad q(y)=-2\,Lny$$

$$g(y)=\int f(y)\,dy=-\int\frac{dy}{y}$$

$$=-Lny$$

و

$$u=e^{-g(y)}\left[\int q(y)\,e^{g(y)}\,dy+C\right]$$

$$=e^{Lny}\left[-\int 2\,Lny\,e^{-Lny}\,dy+C\right]$$

$$=y\left[-2\int\frac{Lny}{y}\,dy+C\right]$$

$$=y\left[-Ln^2y+C\right]$$

$$=-y\,Ln^2y+Cy$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$x^{-1}=-y\,Ln^2y+Cy\,.$$

ب: معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول به‌صورت کلی

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)P(x)=q(x) \qquad (۲۱)$$

با تغییر متغیر $u=f(y)$ ، تبدیل به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌شود. زیرا

$$u=f(y)\quad,\quad\frac{du}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx} \qquad (۲۲)$$

با قرار دادن (۲۲) در (۲۱) داریم

$$\frac{du}{dx}+u\,P(x)=q(x) \qquad (۲۳)$$

و (۲۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول نسبت به‌تابع u می‌باشد.

مثال ۵۶.۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'\cos y+\sin y=x+1 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. با فرض $u = \sin y$ ، داریم

$$u = \sin y \qquad u' = y'\cos y \qquad (۲)$$

با قرار دادن (۲) در (۱)، داریم

$$u' + u = x + 1 \qquad (۳)$$

معادله (۳)، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با تابع u می‌باشد که در آن

$$f(x) = 1 \quad , \quad q(x) = x + 1$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = \int dx$$
$$= x$$

و

$$u = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\,e^{g(x)}\,dx + C\right]$$
$$= e^{-x}\left[\int (x+1)\,e^{x}\,dx + C\right]$$
$$= e^{-x}(x\,e^{x} + C)$$
$$= x + C e^{-x}$$

و جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$\sin y = x + C e^{-x} .$$

مثال ۲ : ۵۷. معادله دیفرانسیل

$$y' - 2 = 2\,x\,e^{-y} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین (۱) را در e^{y} ضرب می‌کنیم

$$y'e^{y} - 2\,e^{y} = 2\,x \qquad (۲)$$

معادله (۲) به‌فرم (۲۱) می‌باشد، با فرض $u = e^{y}$ ، داریم

$$u = e^{y} \quad , \quad u' = y'e^{y} \qquad (۳)$$

با قراردادن (۳) در (۲)، داریم

$$u' - 2u = 2x \qquad (۴)$$

معادله (۴)، خطی مرتبه اول می‌باشد.

$$f(x) = -2 \quad , \quad q(x) = 2x$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = -2\int dx$$
$$= -2x$$

و

$$u = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\,e^{g(x)}\,dx + C\right]$$
$$= e^{2x}\left[\int 2x\,e^{-2x}\,dx + C\right]$$
$$= e^{2x}\left(-x\,e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)$$
$$= -x - \frac{1}{2} + C e^{2x}$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$e^{y} = C e^{2x} - x - \frac{1}{2} .$$

پ : معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول به‌صورت کلی

$$(۲۴) \quad y' + y^2 P_1(x) + y P_2(x) + P_3(x) = 0 \quad \text{و} \quad P_1(x) \neq 0$$

را **معادله ریکاتی** نامند. برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی این معادله را داشته باشیم. جواب عمومی این معادله به‌فرم

$$(۲۵) \qquad y = y_1 + \frac{1}{z}$$

می‌باشد که y_1 جواب خصوصی معادلهٔ (۲۴) است و z تابعی از x می‌باشد و با جای‌گذاری (۲۵) در (۲۴)، معادله، تبدیل به‌یک معادله خطی مرتبه اول می‌شود. زیرا

$$(۲۶) \qquad y = y_1 + \frac{1}{z} \quad , \quad y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

(۲۶) را در (۲۴) قرار می‌دهیم، داریم

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + \left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 P_1(x) + \left(y_1 + \frac{1}{z}\right) P_2(x) + P_3(x) = 0$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + y_1^2 P_1(x) + \frac{1}{z^2}P_1(x) + 2\frac{y_1}{z}P_1(x) + y_1P_2(x) + \frac{1}{z}P_2(x) + P_3(x) = 0$$

$$(y_1' + y_1^2P_1(x) + y_1P_2(x) + P_3(x)) - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2}P_1(x) + 2\frac{y_1}{z}P_1(x) + \frac{1}{z}P_2(x) = 0$$

چون y_1 یک جواب خصوصی معادله (۲۴) است ، پس

$$y_1' + y_1^2 P_1(x) + y_1 P_2(x) + P_3(x) = 0$$

می‌باشد ، در نتیجه ، داریم

$$z' - z(2y_1P_1(x) + P_2(x)) = P_1(x) \qquad (۲۷)$$

معادله (۲۷) ، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با تابع z می‌باشد .

مثال ۵۸۰۲ . معادله دیفرانسیل

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2 \qquad (۱)$$

را حل کنید ،اگر $y_1(x) = -x^2$ باشد .

حل . جواب عمومی را به‌فرم

$$y = -x^2 + \frac{1}{z} \qquad (۲)$$

می‌باشد ، از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم ،

$$y' = -2x - \frac{z'}{z^2} \qquad (۳)$$

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$-2x - \frac{z'}{z^2} = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$-2x - \frac{z'}{z^2} = x^3 - 2x + \frac{2}{xz} - x^3 - \frac{1}{xz^2} + \frac{2x}{z}$$

یا

$$z' + z\left(\frac{2}{x} + 2x\right) = \frac{1}{x} \qquad (۴)$$

معادله (۴) ، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد که در آن

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2x \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + 2x\right)dx$$
$$= 2\,Lnx + x^2$$

و

$$z = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\,e^{g(x)}\,dx + C\right]$$

$$= e^{-Lnx^2 - x^2}\left[\int \frac{1}{x}\,e^{Lnx^2 + x^2}\,dx + C\right]$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x^2}\left[\int x\,e^{x^2}\,dx + C\right]$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x^2}\left[\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right]$$

$$= \frac{1}{2x^2} + C\frac{e^{-x^2}}{x^2} \qquad (۵)$$

در (۲) بجای z ، (۵) را قرار می‌دهیم و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = -x^2 + \frac{2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + C}.$$

مثال ۲.۵۹. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \qquad (۱)$$

را حل کنید، اگر $y_1(x) = x$ باشد.

حل. جواب عمومی را به‌فرم

$$y = x + \frac{1}{z} \qquad (۲)$$

می‌باشد، از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$y' = 1 - \frac{z'}{z^2} \qquad (۳)$$

با قرار دادن (۲) و (۳)، در (۱) داریم

$$1 - \frac{z'}{z^2} = 1 + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x^2}\left(x + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{xz} - 1 - \frac{1}{x^2z^2} - \frac{2}{xz}$$

$$= 1 - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2z^2}$$

یا

$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2} \qquad (۴)$$

معادله (۴)، خطی مرتبه اول می‌باشد که در آن

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -Lnx$$

و

$$z = e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}\,dx + C\right]$$

$$= e^{Lnx}\left[\int \frac{1}{x^2}\,e^{-Lnx}\,dx + C\right]$$

$$= x\left[\int \frac{1}{x^3}\,dx + C\right]$$

$$= -\frac{1}{2x} + Cx \qquad (۵)$$

در (۲)، بجای z ، (۵) را قرار می‌دهیم و جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = x + \frac{2x}{2Cx^2 - 1}$$

مجموعه مسائل ۲.۵.

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $y' + 2y = e^{-x}$

۲. $xy' + 2y = 8x^2$

۳. $y' - y\cot x = \csc x$

۴. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - y\sec x$

۵. $y' - 3y\tan x = 2$

۶. $(x^2 + 2x - 1)y' - (x+1)y = x - 1$

۷. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$

۸. $x(1+2y)dx - dy = 0$

۹. $y' + y\cos x = e^{2x}$

۱۰. $xy' + y = x\sin x$

۱۱. $xy' - y = x^2 \sin x$

۱۲. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

۱۳. $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$

۱۴. $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

۱۵. $xy' + 2y = x^2$ $y = \frac{5}{4}$ وقتی $x = -1$

۱۶. $x^2y' + 2xy = \cos x$ $y = 0$ وقتی $x = \pi$

۱۷. $xy' + 2y = \dfrac{Lnx}{x^2}$ $y = 3$ وقتی $x = 1$

۱۸. $y' = 2y + e^x - x$ $y = \frac{1}{4}$ وقتی $x = 0$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱۹. $y' = \dfrac{1}{y(1-x)}$

۲۰. $\dfrac{dx}{dy} = y - 4xy$

۲۱. $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$

۲۲. $y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

۲۳. $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\cos y - xy)dy$

معادلات دیفرانسیل، برنولی زیر را حل کنید.

۲۴. $xy' + xy^2 = y$

۲۵. $xy' - y(2yLnx - 1) = 0$

۲۶. $2xyy' + x = y^2$

۲۷. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

۲۸. $y' = y(y^3\cos x + \tan x)$

۲۹. $y' = \dfrac{x(x^2+y^2-1)}{2y(x^2-1)}$

معادلات دیفرانسیل، برنولی زیر را حل کنید.

۳۰. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$

۳۱. $(xy + x^2y^3)y' = 1$

۳۲. $y'x^3\sin y + 2y = xy'$

۳۳. $2\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} + x^3\cos y = 0$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۳۴. $y' + 1 = 4e^{-y}\sin x$

۳۵. $y'\cos y + x\sin y = 2x$

۳۶. $2(y+1)y' - \frac{2}{x}(y+1)^2 = x^4$

معادلات دیفرانسیل، ریکاتی زیر را حل کنید.

۳۷. $y_1(x) = \sec x$ و $y' = 2\tan x\sec x - y^2\sin x$

۳۸. $y_1(x) = \frac{1}{x}$ و $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$

۳۹. $y_1(x) = \frac{1}{x}$ $\quad y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$

۴۰. $y_1(x) = 1 - 4x$ $\quad y' = y^2 + 8xy + 16x^2 - 5$

۶.۲. معادلات مرتبه اول که نسبت به‌مشتق حل نشده‌اند

در بخشهای قبل در مورد حل معادلاتی که به‌فرم $y' = f(x, y)$ بیان می‌شد صحبت کردیم. حال فرض کنید y' بطور صریح نسبت به x و y بیان نشود، پس‌لازم است در این بخش در مورد چگونگی حل این معادلات صحبت کنیم. و پس از شروع مطلب توضیح مختصری در بارهٔ جواب غیر عادی خواهیم داشت.

قبلا تعریف کردیم که‌جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، جوابی است که منحنی آن بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس باشد. بدبنال راه حلی برای پیدا کردن جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستیم. از طرفی می‌دانیم پوش یک دسته منحنی $F(x, y, c) = 0$، منحنی می‌باشدکه بر کلیه منحنی‌های آن دسته منحنی (که به‌ازای c های مختلف بدست می - آید) و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس است. پس برای بدست آوردن جواب غیر -

عادی یک معادله دیفرانسیل، ابتدا جواب عمومی آن را پیدا می‌کنیم وازهمان‌روشی‌که پوش یک‌دسته منحنی را بدست می‌آوریم استفاده می‌کنیم. در زیر مختصرا درباره راه پیدا کردن پوش یک دسته منحنی صحبت می‌کنیم. فرض کنید $F(x, y, c) = 0$ معادله یک دسته منحنی باشد، می‌دانیم پوش این دسته منحنی از حذف پارامتر c در دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

اگر حذف c عملا ممکن نباشد، می‌توان مختصات پوش را نسبت به پارامتر c بیان نمود یعنی مختصات معادله پوش را به‌فرم پارامتری بیان نمود.

نکته‌ای که باید بدان توجه نمود، آنست که نتیجه‌ای که از حذف c در دستگا (۱) بدست می‌آید ممکن است پوش نباشد و یا قسمتی از آن پوش باشد. (مثال‌های د این زمینه در زیر می‌آید)

تعریف ۵.۲. نقاط استثنایی یک دسته منحنی، نقاطی هستند که در آن نقاط مماس ب منحنی مشخص نیست.

این نقاط از حل دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

زیــرا اگر $F(x, y, c) = 0$ معادله یک دسته منحنی باشد

$$0 = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

و با صفر بودن صورت و مخرج طرف راست عبارت بالا ، مشتق وجود ندارد یعنی مماس بر منحنی مشخص نیست .

حال اگر $F(x,y,c)=0$ شامل نقاط استثنایی باشد می‌توان مختصات این نقاط‌را بر حسب C به‌فرم زیر نوشت

$$x=A(C) \quad , \quad y=B(C)$$

یعنی در این نقاط داریم

$$F[A(C),B(C),C]=0$$

نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dA}{dC}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dB}{dC}+\frac{\partial F}{\partial C}=0$$

از طرفی در این نقاط $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ در نتیجه باید $\frac{\partial F}{\partial C}=0$ باشد
به‌عبارت دیگر نقاط استثنایی هم از حل دستگاه (۱) بدست می‌آیند

مثال ۶۰.۲. پوش دسته منحنی

$$(x-C)^2+y^2=4 \qquad (۱)$$

را پیدا کنید .

حل . از (۱) نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$-2(x-C)=0 \quad , \quad x=C$$

سپس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases}(x-C)^2+y^2=4\\ x=C\end{cases}$$

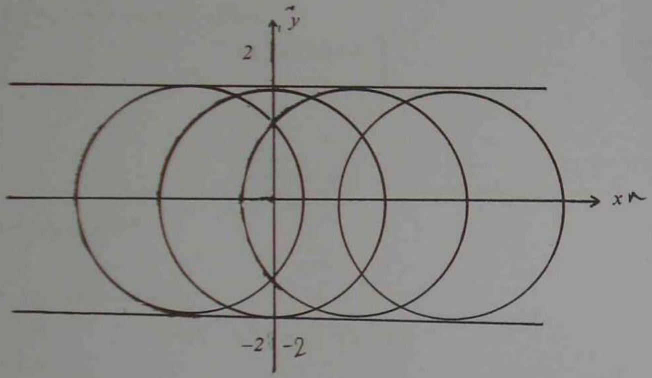
در نتیجه

$$y^2=4 \quad , \quad y=\pm 2$$

و خطوط $y=\pm 2$ معادلات پوش هستند*

---

* دوایر نقاط استثنایی ندارند ، زیرا



شکل ۲.۲

مثال ۶۱.۲. پوش دسته منحنی

$$y=Cx+C^2+1 \qquad (۱)$$

را پیدا کنید .

حل . از (۱) نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$0=x+2C$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(x-C)=0 & x=C\\ 2y=0 & y=0\end{cases}$$

در معادله دسته منحنی قرار می‌دهیم

$$0+0\neq 4$$

سپس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} y = Cx + C^2 + 1 \\ x + 2C = 0 \end{cases}$$

داریم

$$y = -\frac{x^2}{4} + 1$$

که معادله پوش می‌باشد*.

مثال ۲.۶۲. پوش دسته منحنی

$$(x-C)^2 + (y-C)^2 = 2C^2 \qquad (1)$$

را پیدا کنید.

حل. از (۱) نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$-2(x-C) - 2(y-C) = 4C$$

یا

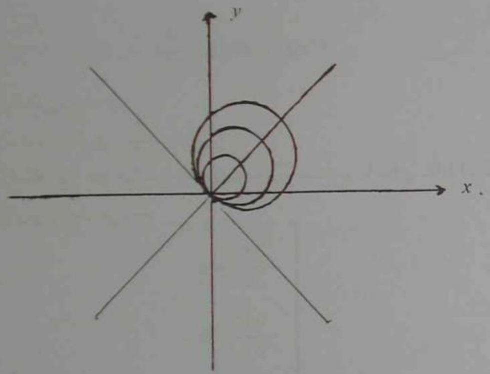
$$x + y = 0$$

سپس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} (x-C)^2 + (y-C)^2 = 2C^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

چون معادله دوم دستگاه مستقل از C است، پس جواب مطلوب $x + y = 0$ می‌باشد. حال با توجه به‌شکل می‌بینیم که فقط نقطه $(0, 0)$ واقع در روی $y + x = 0$، پوش می‌باشد

* خطوط نقاط استثنایی ندارند.



شکل (۲.۳۰)

مثال ۲.۶۳. پوش دسته منحنی

$$(y-C)^2 = (x-C)^3 \qquad (1)$$

را پیدا کنید.

حل. از (۱) نسبت به C مشتق می‌گیریم

$$2(y-C) = 3(x-C)^2$$

سپس C را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} (y-C)^2 = (x-C)^3 \\ 2(y-C) = 3(x-C)^2 \end{cases}$$

یا

$$\frac{9}{4}(x-C)^4 = (x-C)^3$$

$$(x-C)^3\left[\frac{9}{4}(x-C) - 1\right] = 0$$

$$C=x \quad , \quad C=x-\frac{4}{9}$$

که به‌ازای $C=x$ داریم $y=x$

و به‌ازای $C=x-\frac{4}{9}$ داریم $y=x-\frac{4}{27}$

برای بررسی اینکه این دو جواب ، معادلات پوش هستند و یا مکان نقاط استثنایی می ـ باشند دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \end{cases}$$

که در آن

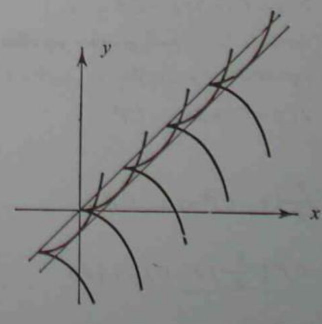
$$F(x,y,C)=(y-C)^2-(x-C)^3=0$$

$$\begin{cases} -3(x-C)^2=0 \\ 2(y-C)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=C \\ y=C \end{matrix}$$

یا

$$y=x$$

پس $y=x$ مکان نقاط استثنایی و $y=x-\frac{4}{27}$ معادله پوش می‌باشد



شکل (۴۰۲)

حال می‌خواهیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را حل کنیم و فرض می‌کنیم y' بسادگی برحسب x و y بیان نشود برای حل این معادله حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

الف . اگر معادله به‌فرم

$$F(y')=0 \qquad (۳)$$

باشد و لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y'=k_i$ باشد ، چون معادله (۳) شامل x و y نیست پس k_i ، یک ثابت است . در نتیجه

$$y'=k_i \quad , \quad y=k_ix+C$$

یا

$$k_i=\frac{y-C}{x}$$

و چون k_i یک ریشه معادله (۳) می‌باشد ، یعنی $F(k_i)=0$ پس

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$$

جواب عمومی معادله (۳) خواهد بود .

مثال ۲ .۶۴ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(y')^5-(y')^3+y'+1=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . با فرض $y'=P$ در (۱) داریم

$$P^5-P^3+P+1=0 \qquad (۲)$$

معادله (۲) یک کثیرالجمله از درجه ۵ می‌باشد و می‌دانیم هر کثیرالجمله از درجه n ، قابل تجزیه به‌عوامل خطی و درجه دوم می‌باشد ، لذا معادله (۲) لااقل دارای یک ریشه حقیقی $P=k$ خواهد بود .

$$y'=k \Rightarrow y=kx+C$$

یا

$$k = \frac{y-C}{x}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - \left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right) + 1 = 0$$

جواب معادله (۱) می‌باشد.

ب. اگر معادله به‌فرم

$$F(y, y') = 0 \tag{۴}$$

باشد. (فاقد متغیر). اگر (۴) نسبت به y' قابل حل باشد، در این‌صورت

$$y' = f(y) \Rightarrow dy = f(y)\,dx \tag{۵}$$

معادله (۵) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد و

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C$$

ولی اگر y' بسادگی برحسب y بیان نشود. اما y بسادگی برحسب y' بیان گردد یعنی $y = f(y')$ باشد. با فرض $y' = P$ داریم

$$y = f(P) \tag{۶}$$

از طرفین (۶) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = f'(P)\,dP \tag{۷}$$

از طرفی

$$y' = P \Rightarrow dy = P\,dx \tag{۸}$$

(۸) را در (۷) قرار می‌دهیم

$$P\,dx = f'(P)\,dP$$

$$dx = \frac{f'(P)}{P}\,dP$$

یا

$$x = \int \frac{f'(P)}{P}\,dP + C$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = f(P) \\ x = \int \dfrac{f'(P)}{P}\,dP + C \end{cases} \tag{۹}$$

و اگر عملا حذف P ممکن نباشد (۹) را جواب عمومی به‌فرم پارامتری، با پارامتر P می‌نامیم اگر (۴) بسادگی برای y یا y' حل نشود، فرض می‌کنیم

$$y = f_1(P)\ ,\ y' = f_2(P)$$

و چون

$$dy = y'\,dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{f_1'(P)\,dP}{f_2(P)}$$

و

$$x = \int \frac{f_1'(P)}{f_2(P)}\,dP + C$$

و با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = f_1(P) \\ x = \int \dfrac{f_1'(P)}{f_2(P)}\,dP + C \end{cases} \tag{۱۰}$$

جواب عمومی بدست می‌آید. و اگر حذف P ممکن نباشد، (۱۰) جواب عمومی به‌فرم پارامتری با پارامتر P می‌باشد.

مثال ۲.۶۵. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y = (y')^2 e^{y'} \tag{۱}$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y' = P\ ,\ dy = P\,dx$

$$y = P^2 e^P \tag{۲}$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = (2Pe^P + P^2 e^P)\,dP$$

$$P\,dx = P(2+P)e^P dP$$

$$P(e^P(2+P)\,dP - dx) = 0 \qquad (۳)$$

معادله (۳) دارای دو جواب می‌باشد یکی $P=0$ و دیگری از حل معادله

$$e^P(2+P)\,dP = dx \qquad (۴)$$

بدست می‌آید . با انتگرال‌گیری از (۴) داریم

$$x = e^P + Pe^P + C \qquad (۵)$$

حال باید P را در دستگاهی که یک معادله آن $y=P^2e^P$ و معادله دیگر آن نتایج حل معادله (۳) می‌باشد حذف کنیم ،

$$\begin{cases} y = P^2 e^P \\ x = e^P(1+P) + C \end{cases} \qquad (۶)$$

(۶) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد . و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیر عادی بدست می‌آید .

$$\begin{cases} y = P^2 e^P \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \qquad (۷)$$

و $y=0$ جواب غیرعادی می‌باشد .

تذکر ۱ . همانطور که ملاحظه می‌کنید ، معادله (۳) دارای دو جواب بود که یکی به C بستگی نداشت و دیگری به C بستگی داشت . آن جوابی که به C بستگی دارد منجر به جواب عمومی می‌شود و آن جوابی که به C بستگی ندارد ، منجر به‌جواب غیرعادی می‌شود .

تذکر ۲ . یک راه برای بدست آوردن جواب غیرعادی معادله، $F(x,y,y')=0$ آنست که فرض می‌کنیم $y'=P$ و P را در دستگاه زیر

$$\begin{cases} F(x,y,P) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial P} = 0 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

حذف می‌کنیم ، چنانچه نتیجه در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند ، جواب غیرعادی می‌باشد . این مطلب را در مورد مثال ۶۵.۲ . بررسی می‌کنیم .

در معادله

$$y = (y')^2 e^{y'}$$

قرار می‌دهیم $y'=P$ ،

$$y = P^2 e^P \qquad (\bullet)$$

از طرفین نسبت به P مشتق می‌گیریم

$$0 = 2Pe^P + P^2 e^P = Pe^P(2+P)$$

که دو جواب دارد

$$P=0 \ , \ P=-2$$

$P=0$ را در $(\bullet)$ قرار می‌دهیم

$$y=0$$

که در معادله صدق می‌کندو جواب غیرعادی می‌باشد .

$P=-2$ را در $(\bullet)$ قرار می‌دهیم

$$y = 4e^{-2}$$

که در معادله صدق نمی‌کند

$$4e^{-2} \neq 0$$

مثال ۶۶.۲ . معادله دیفرانسیل

$$y = y' Ln y' \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . فرض می‌کنیم $y'=P \ , \ dy = P\,dx$

$$y = P\,Ln\,P \qquad (۲)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = (Ln P + 1)\,dP$$

$$P\,dx = (Ln P + 1)\,dP$$

$$dx = \left(\frac{1 + Ln\,P}{P} \right) dP \tag{۳}$$

با انتگرال‌گیری از (۳) داریم

$$x = \int \frac{1}{P}\, dP + \int \frac{Ln\,P}{P}\, dP$$
$$= Ln\,P + \frac{1}{2} (Ln\,P)^2 + C$$

با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = P\, Ln\,P \\ x = Ln\,P + \dfrac{1}{2} (Ln\,P)^2 + C \end{cases} \tag{۴}$$

جواب عمومی بدست می‌آید. البته (۴) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد. این معادله‌دارای جواب غیرعادی نیست. زیرا اگر از طرفین (۲) نسبت به P مشتق‌بگیریم، داریم

$$0 = Ln\,P + 1$$
$$Ln\,P = -1 \ , \ P = e^{-1} \tag{۵}$$

با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = P\, Ln\,P \\ P = e^{-1} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود

$$y = -e^{-1} \tag{۶}$$

(۶) در (۱) صدق نمی‌کند، زیرا

$$-e^{-1} \neq 0$$

مثال ۶۷۰۲. معادله دیفرانسیل

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1 \tag{۱}$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$y' = sinh\,P \ \Rightarrow \ y = cosh\,P$$
$$dy = sinh\,P\, dP$$

و

$$dy = y' dx \ \Rightarrow \ dx = \frac{dy}{y'}$$
$$= \frac{sinh\,P\, dP}{sinh\,P} = dP \tag{۲}$$

و بـا انتگرال‌گیری از طرفین (۲)، داریم

$$x = P + C$$

با توجه به (۱۰)

$$\begin{cases} y = cosh\,P \\ x = P + C \end{cases}$$

با حذف P در دستگاه بالا، جواب عمومی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y = cosh(x - C)$$

پ. اگر معادله به‌فرم

$$F(x , y') = 0 \tag{۱۲}$$

باشد. (فاقد تابع). اگر (۱۲) نسبت به y' قابل حل باشد، در اینصورت

$$y' = f(x) \ \Rightarrow \ y = \int f(x) + C$$

ولی اگر y' بسادگی برحسب x بیان نشود. اما x بسادگی برحسب y' بیان شود. یعنی $x = f(y')$ باشد. با فرض $y' = P$ داریم

$$x = f(P) \tag{۱۳}$$

از طرفین (۱۳) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = f'(P)\, dP \tag{۱۴}$$

از طرفی

$$y' = P \ \Rightarrow \ dx = \frac{1}{P} dy \tag{۱۵}$$

(۱۵) را در (۱۴) قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{1}{P}dy = f'(P)\,dP$$

$$dy = Pf'(P)\,dP$$

یا

$$y = \int Pf'(P)\,dP + C$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x = f(P) \\ y = \int Pf'(P)\,dP + C \end{cases} \qquad (۱۶)$$

و اگر عملا حذف P در دستگاه (۱۶) ممکن نباشد، (۱۶) را جواب عمومی به‌فرم پارامتری، با پارامتر P می‌نامیم.

اگر (۱۲) بسادگی برای x یا y' حل نشود. فرض می‌کنیم

$$x = f_1(P) \;,\; y' = f_2(P)$$

و چون $dy = y'dx$ ، $dx = f_1'(P)\,dP$ ، پس

$$dy = f_2(P) f_1'(P)\,dP$$

و

$$y = \int f_2(P) f_1'(P)\,dP + C$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x = f_1(P) \\ y = \int f_2(P) f_1'(P)\,dP + C \end{cases} \qquad (۱۷)$$

و اگر حذف P ممکن نباشد، (۱۷) جواب عمومی به‌فرم پارامتری، با پارامتر P می‌باشد

مثال ۶۸.۲. معادله دیفرانسیل

$$x = Ln\, y' + \sin y' \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$y' = P \;,\; dx = \frac{1}{P}dy$$

$$x = Ln\, P + \sin P \qquad (۲)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = \left(\frac{1}{P} + \cos P\right) dP$$

$$\frac{1}{P}dy = \left(\frac{1}{P} + \cos P\right) dP$$

$$dy = (1 + P\cos P)\,dP \qquad (۳)$$

با انتگرال‌گیری از (۳) داریم

$$y = \int (1 + P\cos P)\,dP$$
$$= P + P\sin P + \cos P + C$$

و

$$\begin{cases} x = Ln\, P + \sin P \\ y = P(1 + \sin P) + \cos P + C \end{cases} \qquad (۴)$$

(۴) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد.

مثال ۶۹.۲. معادله دیفرانسیل

$$x = 2y' - Ln\, y' \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$y' = P \;,\; dx = \frac{1}{P}dy$$

$$x = 2P - Ln\, P \qquad (۲)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = \left(2 - \frac{1}{P}\right) dP$$

$$\frac{1}{P}dy = \left(2 - \frac{1}{P}\right) dP$$

$$dy = (2P - 1)\,dP \qquad (۳)$$

با انتگرال‌گیری از (۳) داریم

$$y = \int (2P - 1)\,dP$$

$$= P^2 - P + C$$

و

$$\begin{cases} x = 2P - LnP \\ y = P^2 - P + C \end{cases}$$ (۴)

(۴) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد.

مثال ۲.۷۰. معادله دیفرانسیل

$$x\sqrt{1 + y'^2} = y'$$ (۱)

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $-\dfrac{\pi}{2} < P < \dfrac{\pi}{2}$ ، $y' = tanP$ ، آنگاه $x = sinP$

و

$$dy = y'dx$$

$$x = sinP \Rightarrow dx = cosP\,dP$$

پس

$$\begin{aligned} dy &= tanP\,cosP\,dP \\ &= sinP\,dP \end{aligned}$$ (۲)

با انتگرال‌گیری از (۲) داریم

$$y = -cosP + C$$

و با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} x = sinP \\ y = -cosP + C \end{cases}$$

جواب عمومی به‌فرم $x^2 + (y - C)^2 = 1$ بدست می‌آید.

ت. اگر معادلهٔ دیفرانسیل

$$F(x, y, y') = 0$$

به‌سادگی برحسب x بیان شود، یعنی داشته باشیم.

$$x = f(y, y')$$

با فرض $y' = P$ ، داریم

$$x = f(y, P)$$ (۱۹)

از طرفین (۱۹)، دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial P}dP$$ (۲۰)

از طرفی

$$y' = P \Rightarrow dx = \frac{1}{P}dy$$ (۲۱)

(۲۱) را در (۲۰) قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{1}{P}dy = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial P}dP$$

یا

$$\frac{1}{P} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dy}$$ (۲۲)

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x = f(y, P) \\ \dfrac{1}{P} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial P} \cdot \dfrac{dP}{dy} \end{cases}$$ (۲۳)

و اگر عملا حذف P ممکن نباشد، (۲۳) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد.

تذکر ۳. ابتدا معادله دوم دستگاه (۲۳) را حل می‌کنیم و سپس نتایج حل را بجای معادله دوم دستگاه (۲۳) قرار می‌دهیم

مثال ۲.۷۱. معادله دیفرانسیل

$$y = 2xy' - yy'^2$$ (۱)

را حل کنید.

حل . فرض می‌کنیم $y' = P \ , \ dx = \frac{1}{P} dy$

در معادله (۱) بجای y' ، P می‌گذاریم و داریم

$$2x = \frac{y}{P} + yP \qquad (۲)$$

از طرفین (۲) دیفرانسیل می‌گیریم

$$2\,dx = \frac{P\,dy - y\,dP}{P^2} + y\,dP + P\,dy$$

$$2\frac{1}{P}\,dy = \frac{P\,dy - y\,dP}{P^2} + y\,dP + P\,dy$$

یا

$$2P = P - y\frac{dP}{dy} + yP^2\frac{dP}{dy} + P^3$$

$$-P - y\frac{dP}{dy} + P^2\left(P + y\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

$$\left(P + y\frac{dP}{dy}\right)(P^2 - 1) = 0 \qquad (۳)$$

از حل (۳) داریم

$$P^2 - 1 = 0 \Rightarrow P = \pm 1 \qquad (۴)$$

$$P + y\frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad (۵)$$

(۵) از نوع متغیرهای از هم‌جدا می‌باشد و با انتگرال‌گیری از (۵) داریم

$$Ln\,P + Ln\,y = Ln\,C$$

$$Py = C \Rightarrow P = \frac{C}{y} \qquad (۶)$$

از حذف P در دستگاه زیر، جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{P} + yP \\ P = \frac{C}{y} \end{cases}$$

$$2x = \frac{y^2}{C} + C$$

$$y^2 = C(2x - C)$$

و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیرعادی بدست می‌آید

$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{P} + yP \\ P = \pm 1 \end{cases}$$

$$2x = 2y \ , \ 2x = -2y$$

یا $x = \pm y$ جوابهای غیرعادی معادله می‌باشند .

حال جوابهای غیرعادی را به دو روش دیگر نیز محاسبه می‌کنیم

اول ، با حذف C بین جواب عمومی و مشتق آن نسبت به C

$$\begin{cases} y^2 = C(2x - C) \\ 0 = 2x - 2C \end{cases}$$

از معادله دوم دستگاه داریم $x = C$. این مقدار را در معادله اول دستگاه قرار می‌دهیم

$$y^2 = x(2x - x)$$

$$y^2 = x^2$$

$$y = \pm x$$

دوم ، با حذف P ، بین (۲) ، ($(x = f(y, P))$) و مشتق آن نسبت به P

$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{P} + yP \\ 0 = -\frac{y}{P^2} + y \end{cases}$$

از معادله دوم دستگاه داریم $P = \pm 1$. این مقدار را در معادلهٔ اول دستگاه قرار می‌دهیم

$$2x = 2y \quad , \quad 2x = -2y$$

یا $y = \pm x$. البته هروقت از روش دوم جواب بدست بیاوریم، حتما باید در معادله گذاشته شود و در صورتی که در معادله صدق کند، جواب غیرعادی می‌باشد.

مثال ۷۲۰۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'} \tag{1}$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y' = P \quad , \quad dx = \frac{1}{P}\,dy$

در معادله (۱)، بجای y'، P می‌گذاریم، داریم

$$x = P^2 + \frac{y}{P} \tag{2}$$

از طرفین (۲)، دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = 2P\,dP + \frac{P\,dy - y\,dP}{P^2}$$

$$\frac{1}{P}\,dy = 2P\,dP + \frac{1}{P}\,dy - \frac{y}{P^2}\,dP$$

$$\frac{1}{P} = 2P\frac{dP}{dy} + \frac{1}{P} - \frac{y}{P^2}\cdot\frac{dP}{dy}$$

یا

$$\frac{dP}{dy}\left(2P - \frac{y}{P^2}\right) = 0 \tag{3}$$

از حل (۳)، داریم

$$\frac{dP}{dy} = 0 \;\Rightarrow\; P = C \tag{4}$$

$$2P - \frac{y}{P^2} = 0 \;\Rightarrow\; P = \sqrt[3]{\frac{y}{2}} \tag{5}$$

از حذف P در دستگاه زیر، جواب عمومی بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x = P^2 + \dfrac{y}{P} \\ P = C \end{cases}$$

$$y = Cx - C^3$$

و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیرعادی بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x = P^2 + \dfrac{y}{P} \\ P = \sqrt[3]{\dfrac{y}{2}} \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}}\, x^{3/2}$$

ث. اگر معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y') = 0$$

به‌سادگی برحسب y بیان شود، یعنی داشته باشیم

$$y = f(x, y') \tag{24}$$

با فرض $y' = P$ ، داریم

$$y = f(x, P) \tag{25}$$

از طرفین (۲۵) دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial P}\,dP \tag{26}$$

از طرفی

$$y' = P \;\Rightarrow\; dy = P\,dx \tag{27}$$

(۲۷) را در (۲۶) قرار می‌دهیم، داریم

$$P\,dx = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial P}\,dP$$

یا

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P}\cdot\frac{dP}{dx} \qquad (۲۸)$$

و جواب عمومی از حذف P در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = f(x, P) \\ P = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial P}\cdot\dfrac{dP}{dx} \end{cases} \qquad (۲۹)$$

و اگر حذف P ممکن نباشد، (۲۹) جواب عمومی به‌فرم پارامتری می‌باشد.

تذکر ۴. ابتدا معادله دوم دستگاه (۲۹) را حل می‌کنیم و سپس نتایج حل را، بجای معادله دوم دستگاه (۲۹) قرار می‌دهیم.

مثال ۲.۷۳. معادله دیفرانسیل

$$y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y' = P \ , \ dy = P\,dx$

در معادله (۱)، بجای y'، P می‌گذاریم

$$y = \frac{P^2}{2} + 2xP + x^2 \qquad (۲)$$

از طرفین (۲)، دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = P\,dP + 2P\,dx + 2x\,dP + 2x\,dx$$

$$P\,dx = P\,dP + 2P\,dx + 2x\,dP + 2x\,dx$$

$$P = (P + 2x)\frac{dP}{dx} + 2P + 2x$$

یا

$$(P + 2x)\left(\frac{dP}{dx} + 1\right) = 0 \qquad (۳)$$

از حل (۳)، داریم

$$\frac{dP}{dx} + 1 = 0 \ \Rightarrow \ P = C - x \qquad (۴)$$

$$P + 2x = 0 \ \Rightarrow \ P = -2x \qquad (۵)$$

از حذف P در دستگاه زیر، جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = \dfrac{P^2}{2} + 2xP + x^2 \\ P = C - x \end{cases}$$

$$y = Cx + \frac{1}{2}(C^2 - x^2)$$

و از حذف P در دستگاه زیر، جواب غیرعادی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = \dfrac{P^2}{2} + 2xP + x^2 \\ P = -2x \end{cases}$$

$$y = -x^2$$

مثال ۲.۷۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y = -\frac{1}{x^2 y'} - xy' \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل ، فرض می‌کنیم $y' = P \;,\; dy = P\,dx$

در معادله (۱) ، بجای y' ، P می‌گذاریم

$$y = -\frac{1}{x^2 P} - xP \qquad (۲)$$

از طرفین (۲) ، دیفرانسیل می‌گیریم

$$dy = \frac{2xP\,dx + x^2\,dP}{x^4 P^2} - x\,dP - P\,dx$$

$$P\,dx = \frac{2}{x^3 P}\,dx + \frac{1}{x^2 P^2}\,dP - x\,dP - P\,dx$$

$$2P = \frac{2}{x^3 P} + \left(\frac{1}{x^2 P^2} - x\right)\frac{dP}{dx}$$

$$2(P^2 x^3 - 1)P = x(1 - x^3 P^2)\frac{dP}{dx}$$

$$(1 - x^3 P^2)\left(x\frac{dP}{dx} + 2P\right) = 0 \qquad (۳)$$

از حل (۳) ، داریم

$$x\frac{dP}{dx} + 2P = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + 2\frac{dx}{x} = 0 \qquad (۴)$$

(۴) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد و داریم

$$\ln P + \ln x^2 = \ln c$$

$$P = \frac{c}{x^2}$$

$$1 - x^3 P^2 = 0 \Rightarrow P = \pm\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

از حذف P در دستگاه زیر جواب عمومی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{x^2 P} - xP \\[2mm] P = \dfrac{c}{x^2} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{c} - \frac{c}{x}$$

$$c^2 + cxy + x = 0$$

و از حذف P در دستگاه زیر جواب غیرعادی بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{x^2 P} - xP \\[2mm] P = \pm\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$y^2 = \frac{4}{x}$$

- معادله کلرو *

هر معادله دیفرانسیل بصورت

$$y = xy' + f(y') \qquad (۳۰)$$

معادله کلرو نامیده می‌شود . برای حل این معادله ، فرض می‌کنیم $y' = P$

$$y = Px + f(P) \qquad (۳۱)$$

از طرفین (۳۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم ، داریم

$$y' = P = P + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\frac{dP}{dx}$$

یا

$$[x + f'(P)]\frac{dP}{dx} = 0 \qquad (۳۲)$$

* Clairaut

از حل (۳۲) داریم

$$\frac{dP}{dx}=0 \Rightarrow P=c$$

و

$$x+f'(P)=0$$

با حذف P در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y=Px+f(P)\\ P=c\end{cases}$$

جواب عمومی به‌فرم زیر بدست می‌آید

$$y=cx+f(c) \qquad (۳۳)$$

که یک دسته خطوط مستقیم می‌باشد.

توجه. برای بدست آوردن جواب عمومی در معادله کلرو کافی‌است در معادله به‌جای y' مقدار c گذاشته شود. و با حذف p در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y=Px+f(P)\\ x+f'(P)=0\end{cases} \qquad (۳۴)$$

جواب غیرعادی بدست می‌آید، و اگر حذف P در دستگاه (۳۴) عملا ممکن نباشد، (۳۴) جواب غیرعادی به‌فرم پارامتری می‌شود.

تذکر ۵. برای بدست آوردن جواب غیرعـادی در معادله کلرو، از جواب عمومی نسبت به c مشتق می‌گیریم و c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} y=cx+f(c)\\ 0=x+f'(c)\end{cases}$$

مثال ۲.۷۵. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y=xy'+\frac{1}{y'}$$

را حل کنید.

حل. معادله کلرو می‌باشد. پس برای بدست آوردن جواب عمومی ،کافی‌است به‌جای y' ، c بگذاریم و جواب عمومی به‌فرم زیر است

$$y=cx+\frac{1}{c}$$

برای بدست آوردن جواب غیرعادی، c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} y=cx+\dfrac{1}{c}\\ 0=x-\dfrac{1}{c^2}\end{cases}$$

و جواب غیرعادی

$$y^2=4x.$$

مثال ۲.۷۶. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y=xy'+y'^2$$

را حل کنید.

حل. چون این معادله، معادله کلرو می‌باشد؛ پس جواب عمومی به‌فرم

$$y=cx+c^2$$

است و بـرای بـدست آوردن جواب غیرعادی، c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} y=cx+c^2\\ 0=x+2c\end{cases}$$

و جواب غیرعادی

$$y=-\frac{x^2}{4}.$$

ج: معادله لاگرانژ*

* Lagrange

هر معادله دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (۳۵)$$

معادله لاگرانژ، نامیده می‌شود. برای حل، فرض می‌کنیم $y' = P$

$$y = xf(P) + g(P) \qquad (۳۶)$$

از طرفین (۳۶)، نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$P = f(P) + xf'(P)\frac{dP}{dx} + g'(P)\frac{dP}{dx}$$

$$P - f(P) = [xf'(P) + g'(P)]\frac{dP}{dx}$$

با تقسیم طرفین بر $P - f(P)$ داریم*

$$1 = [x\cdot\frac{f'(P)}{P-f(P)} + \frac{g'(P)}{P-f(P)}]\frac{dP}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dP} - x\frac{f'(P)}{P-f(P)} = \frac{g'(P)}{P-f(P)} \qquad (۳۷)$$

و (۳۷) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، نسبت به تابع x و متغیر P می‌باشد. از حل (۳۷) جواب به‌صورت رابطه‌ای بین x و y به‌فرم $x = \Psi(P)$ بدست می‌آید. که با حذف p در دستگاه زیر

$$\begin{cases} y = xf(P) + g(P) \\ x = \Psi(P) \end{cases} \qquad (۳۸)$$

جواب عمومی بدست می‌آید. واگر عملا حذف P ممکن نباشد، جواب عمومی به فرم پارامتری بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} y = \Psi(P)f(P) + g(P) \\ x = \Psi(P) \end{cases} \qquad (۳۹)$$

* $P - f(P)$ مخالف صفراست، زیرا اگر بخواهد صفر باشد $P = f(P)$، که در این صورت معادله کلرو است.

مثال ۷۷.۲. معادله دیفرانسیل

$$y = xy'^2 + y' \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. با فرض $y' = P$، داریم

$$y = xP^2 + P \qquad (۲)$$

از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$P = P^2 + (2Px + 1)\frac{dP}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dP} - x\frac{2P}{P - P^2} = \frac{1}{P - P^2} \qquad (۳)$$

(۳) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد که در آن

$$f(P) = -\frac{2P}{P - P^2}, \quad q(P) = \frac{1}{P - P^2}$$

$$g(P) = \int f(P)\,dP = -2\int\frac{dP}{1 - P} = 2\,Ln\,|1 - P|$$

و

$$\begin{aligned} x &= e^{-g(P)}\left[\int q(P)e^{g(P)}dP + c\right] \\ &= \frac{1}{(1-P)^2}\left[\int\frac{(1-P)^2}{P(1-P)}dP + c\right] \\ &= \frac{1}{(1-P)^2}\left[Ln P - P + c\right] \end{aligned}$$

و جواب عمومی به‌فرم پارامتری به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} y = \dfrac{P^2}{(1-P)^2}(Ln P - P + c) + P \\ x = \dfrac{1}{(1-P)^2}(Ln P - P + c) \end{cases}$$

البته این معادله دارای دو جواب غیرعادی می‌باشد که مربوط به ریشه‌های $P-P^2=0$ است که به‌ازای $P=0$ ، $P=1$ بدست می‌آید. به‌این صورت که $P=0$ را در (۲) قرار می‌دهیم، داریم $y=0$ و در معادله (۱) صدق می‌کند. و از قراردادن $P=1$ در (۲) داریم $y=x+1$ و در معادله (۱) صدق می‌کند. پس

$$y=0\ ,\quad y=x+1$$

جوابهای غیرعادی معادله می‌باشند.

مثال ۲.۷۸. معادله دیفرانسیل

$$y=xy'^2+y'^3 \qquad (1)$$

را حل کنید.

حل. با فرض $P=y'$، داریم

$$y=xP^2+P^3 \qquad (2)$$

از طرفین (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$P=P^2+(2xP+3P^2)\frac{dP}{dx}$$

$$P(1-P)=P(2x+3P)\frac{dP}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dP}-2\frac{x}{1-P}=\frac{3P}{1-P} \qquad (3)$$

معادله (۳)، خطی مرتبه اول می‌باشد با

$$f(P)=\frac{-2}{1-P}\ ,\quad q(P)=\frac{3P}{1-P}$$

$$g(P)=\int f(P)\,dP=2\int\frac{-dP}{1-P}$$

$$=2\,Ln\,|1-P|$$

و

$$x=\frac{1}{(1-P)^2}\left[\int\frac{3P}{1-P}(1-P)^2\,dP+c\right]$$

$$=\frac{1}{(1-P)^2}\left[\frac{3}{2}P^2-P^3+c\right]$$

و جواب عمومی به‌شکل پارامتری به‌فرم زیر است.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{(1-P)^2}\left(\dfrac{3}{2}P^2-P^3+c\right)\\[2ex] y=\dfrac{P^2}{(1-P)^2}\left(\dfrac{3}{2}P^2-P^3+c\right)+P^3\end{cases}$$

این معادله دارای دو جواب غیرعادی می‌باشد، که مربوط به ریشه‌های $P(1-P)=0$ است و به‌ازای $P=0$ و $P=1$ بدست می‌آیند. با قراردادن $P=0$ و $P=1$ در (۲) داریم $y=0$ و $y=x+1$ که هردو در معادله صدق می‌کنند، پس جوابهای غیرعادی می‌باشند.

ح: معادله مرتبه اول و از درجه دلخواه n به‌فرم

$$(y')^n+f_1(x,y)(y')^{n-1}+\ldots+f_{n-1}(x,y)y'+f_n(x,y)=0 \qquad (40)$$

اگر قابل تجزیه به n عامل خطی نسبت به y' بصورت زیر باشد

$$(y'-g_1(x,y))(y'-g_2(x,y))\ldots(y'-g_n(x,y))=0$$

در اینصورت n معادله مرتبه اول

$$y'=g_1(x,y)\ ,\ y'=g_2(x,y),\ldots,y'=g_n(x,y)$$

را حل‌می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$\Psi_1(x,y,c)=0\ ,\ \Psi_2(x,y,c)=0\ ,\ldots,\Psi_n(x,y,c)=0$$

و جواب عمومی عبارت است از

$$\Psi_1(x,y,c).\Psi_2(x,y,c)\ldots\Psi_n(x,y,c)=0$$

مثال ۲.۷۹. معادله دیفرانسیل

$$xyy'^2+(x^2+xy+y^2)y'+x^2+xy=0 \qquad (1)$$

را حل کنید.

حل. $$y' = \frac{-(x^2+xy+y^2) \pm \sqrt{(x^2+xy+y^2)^2 - 4xy(x^2+xy)}}{2xy}$$

و عبارت زیر رادیکال

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 - 4x^3y - 4x^2y^2 =$$
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y + 2xy^3 - 2x^2y^2 =$$
$$(-x^2+xy+y^2)^2$$

در نتیجه

$$y' = \frac{-(x^2+xy+y^2) \pm (-x^2+xy+y^2)}{2xy}$$

و

$$y' = -\frac{x}{y} \quad , \quad y' = -\frac{x+y}{x}$$

از حل این دو معادله داریم :

$$y^2+x^2-c=0 \quad , \quad 2xy+x^2-c=0$$

وجواب عمومی معادله (۱) بصورت

$$(y^2+x^2-c)(2xy+x^2-c)=0$$

می‌باشد .

مثال ۸۰.۲. معادله دیفرانسیل

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل. $$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2-x^2}}{x}$$

$$y' = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x} \quad , \quad y' = \frac{y-\sqrt{y^2-x^2}}{x}$$

که هر دو همگن می‌باشند . ابتدا معادله

$$y' = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$$

را حل می‌کنیم . با فرض

$$y = vx \quad , \quad y' = v + xv'$$
$$v + xv' = v + \sqrt{v^2-1}$$
$$\frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \frac{dx}{x} \qquad (۲)$$

معادله (۲) از نوع متغیرهای از هم‌جدا می‌باشد. با انتگرال‌گیری از طرفین (۲)، داریم

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = Ln\,|x| + Ln\,c \quad , \quad c>0$$

با استفاده از فرمول

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-a^2}} = Ln(v+\sqrt{v^2-a^2})$$

داریم

$$Ln(v+\sqrt{v^2-1}) = Ln\,cx$$

یا

$$cx = \frac{y}{x} + \sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}$$

$$cx^2 - y = \sqrt{y^2-x^2} \qquad (۳)$$

و به‌طریق مشابه، جواب معادله

$$y' = \frac{y-\sqrt{y^2-x^2}}{x}$$

به‌فرم زیر می‌باشد .

$$cx^2 - y = -\sqrt{y^2-x^2} \qquad (۴)$$

و جواب عمومی ، از ضرب (۳) و (۴) بدست می‌آید

$$[(cx^2-y)-\sqrt{y^2-x^2}][(cx^2-y)+\sqrt{y^2-x^2}]=0$$

یا

$$(cx^2-y)^2-(y^2-x^2)=0$$

$$c^2x^4+y^2-2cx^2y-y^2+x^2=0$$

$$y=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}$$

و جواب غیرعادی از حذف c در دستگاه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} y=\dfrac{c}{2}x^2+\dfrac{1}{2c} \\[2ex] 0=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2c^2} \end{cases}$$

$$y^2=x^2 \Rightarrow y=\pm x$$

مجموعه مسائل ۶.۲.

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید .

۱. $y=y'^2+4y'^3$

۲. $y=y'\sqrt{1+y'^2}$

۳. $y=(y'-1)e^{y'}$

۴. $x=y'^3-y'+2$

۵. $x=y'\cos y'$

۶. $x=y'^2-2y'+2$

۷. $x=\dfrac{1}{1+y'^2}$

۸. $x=y'+\sin y'$

۹. $4y=x^2+y'^2$

۱۰. $yy'^2-2xy'+y=0$

۱۱. $x=\dfrac{y}{y'}+\dfrac{1}{y'^2}$

۱۲. $y^2y'^2+3xy'-y=0$

۱۳. $xy'^2-2yy'+4x=0$

۱۴. $y=xy'-e^{y'}$

۱۵. $y=xy'+\cos y'$

۱۶. $y=xy'+\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

۱۷. $y=2xy'+\dfrac{1}{y'^2}$

۱۸. $y=\dfrac{1}{2}(xy'+y'\mathrm{Ln}\,y')$

۱۹. $y=2xy'+\sin y'$

۲۰. $y=xy'^2-\dfrac{1}{y'}$

۲۱. $y=x(1+y')+y'^2$

۲۲. $y=-xy'+y'^2$

۲ . ۷ روش تکرار پیکارد*

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بسیاری وجود دارند که نمی‌توان آنها را بوسیله یک روش استاندارد یا روشهای ساده‌ای که جوابهای دقیق بدهند، حل نمود. ولی می‌توان از یک روش تقریبی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده نمود. در زیر به‌بررسی یک روش تقریبی که به روش **تکرار پیکارد** موسوم است می‌پردازیم. و جواب تقریبی یک مسئله با شرایط اولیه به‌فرم

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

را بدست می‌آوریم و فرض می‌کنیم که (۱) در فاصله‌ای شامل x_0 دارای یک جواب باشد. با انتگرال‌گیری از (۱) داریم.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y(S))\, dS \qquad (2)$$

زیرا به‌ازاء $x = x_0$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(S, y(S))\, dS$$
$$= y_0 + 0$$

و بعلاوه با مشتق‌گیری از (۲) نسبت به x داریم

$$y' = f(x, y)$$

از طرفی برای مقادیر x نزدیک x_0، مقادیر y در نزدیکی y_0 می‌باشد. بنابراین اولین تقریب، y_1 از y بوسیله تعویض y با y_0 درسمت‌راست (۲) بدست می‌آید.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0)\, dS \qquad (3)$$

و با تعویض y_0 با y_1 درسمت‌راست (۳). دومین تقریب بصورت زیر می‌باشد.

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_1(S))\, dS$$

و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_{n-1}(S))\, dS \qquad (4)$$

و یک دنباله از تقریبها بدست می‌آید. و در شرایط خاصی، این دنباله به‌جواب‌معادله (۱)، همگرا خواهد شد.

مثال ۲ . ۸۱. با استفاده از روش تکرار پیکارد، معادله دیفرانسیل

$$y' = 2y \quad , \quad y(0) = 1 \qquad (1)$$

را حل کنید

حل. با توجه به فرمول (۴)

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0(S))\, dS$$
$$= 1 + \int_0^x 2\, ds$$
$$= 1 + 2x$$

و بهمین طریق y_2 و y_3 و ... را حساب می‌کنیم

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_1(S))\, dS$$
$$= 1 + \int_0^x 2(1 + 2S)\, dS$$
$$= 1 + 2x + 2x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 2(1 + 2S + 2S^2)\, dS$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

و بهمین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به بسط مکلورن، e^{2x} نتیجه می‌گیریم، دنباله جوابها به $y = e^{2x}$ همگرا است.

مثال ۲ . ۸۲. با استفاده از روش تکرار پیکارد، معادله دیفرانسیل

$$y' = 2xy \quad , \quad y(0) = 1$$

را حل کنید

حل.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0)\, dS$$
$$= 1 + \int_0^x 2S\, dS$$
$$= 1 + x^2$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_1(S))\,dS$$
$$= 1 + \int_0^x 2S(1+S^2)\,dS$$
$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}$$
$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_2(S))\,dS$$
$$= 1 + \int_0^x 2S\left(1+S^2+\frac{S^4}{2}\right)dS$$
$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$$

و بهمین ترتیب ادامه می‌دهیم . با توجه به بسط مکلورن e^{x^2} نتیجه می‌گیریم ، که دنباله جوابها به $y=e^{x^2}$ ، همگرا است .

مجموعه مسائل ۷.۲

با استفاده از روش تکرار پیکارد ، معادلات زیر را حل کنید .

۱. $y' = y^2 + 4 \quad , \quad y(0)=0$

۲. $y' = x + y \quad , \quad y(0)=1$

۳. $y' = 2x(1+y) \quad , \quad y(0)=0$

۴. $y' = 1 + y^2 \quad , \quad y(0)=0$

۵. $y' = x - y \quad , \quad y(0)=1$

۶. $y' = x^2 + y \quad , \quad y(1)=3$

۷. $y' = x + y^2 \quad , \quad y(0)=0$

۸. $y' = 1 + xy \quad , \quad y(1)=2$

۹. $y' = e^x + y \quad , \quad y(0)=0$

۱۰. $y' = x^2 - y \quad , \quad y(1)=2$

۸.۲ . قضایای مربوط به وجود ویکتائی

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (۱)$$

را بررسی می‌کنیم ، (۱) ممکن است اصلا" جوابی نداشته باشد و یا دقیقا" یک جواب و یا بیش از یک جواب داشته باشد . به مثالهای زیر توجه کنید .

مثال ۸۳.۲ . معادله دیفرانسیل

$$(y')^2 + 2 = 0$$

دارای جواب حقیقی نیست

مثال ۸۴.۲ .. معادله دیفرانسیل

$$y'^2 + y^2 = 0 \quad , \quad y(0)=2 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . تنها جواب معادله (1) ، $y \equiv 0$ می‌باشد ، که با توجه به شرط اولیه $y(0)=2$ ، معادله (۱) دارای جواب نیست .

مثال ۸۵.۲ .. معادله دیفرانسیل

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x} \quad , \quad y(0)=2 \qquad (۱)$$

را حل کنید

حل . معادله (۱) ، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد و جواب عمومی آن بفرم

$$y = x\left[-2\int \frac{dx}{x^2} + c\right]$$

می‌باشد ، یعنی

$$y = x\left(\frac{2}{x} + c\right)$$

$$= 2 + cx$$

و با توجه به شرط اولیه $y(0) = 2$

$$2 = 2 + 0$$

پس معادله (۱) دارای بینهایت جواب به‌فرم

$$y = 2 + cx$$

می‌باشد .

مثال ۲ . ۸۶ .

معادله دیفرانسیل

$$y' = 3x^2 \quad , \quad y(0) = 2 \qquad (۱)$$

را حل کنید

حل . $y = x^3 + c$

و با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = x^3 + 2$$

یعنی معادله (۱)، دقیقا" یک جواب دارد .

حال می‌خواهیم، به بررسی این موضوع بپردازیم، که چه شرایطی باید برقرار باشد تا معادله دیفرانسیل

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

فقط یک جواب داشته باشد

قضیه ۲ . ۳ . شرط کافی برای آنکه معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه به‌فرم

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

دارای جواب منحصربفرد $y = F(x)$ باشد، آنست که $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک ناحیه مستطیل شکل شامل (x_0, y_0) در صفحه xy، پیوسته و کراندار باشند . *

قضیه درباره چگونگی پیدا کردن $F(x)$ راه حلی ارائه نمی‌دهد، بعلاوه پیوسته بودن $f(x, y)$ برای وجود جواب کافی است . از طرف دیگر چون شرایط قضیه فوق کافی

* برای اثبات مراجعه شود به کتاب

Martin Braun's D ifferential Eqwation and Their Applications, 2d ed.

(New York : Springer – Verlag , 1978)

است و لازم نیست، لذا معادله با شرط اولیه می‌تواند دارای جواب منحصر بفرد باشد، بطوری که شرایط قضیه برقرار نباشد .

مثال ۲ . ۸۷ .. معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{1}{y^2} \quad , \quad y(x_0) = 0$$

را بررسی می‌کنیم، این معادله دارای جواب عمومی

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c$$

می‌باشد، که با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$$

که جواب منحصر بفرد معادله می‌باشد . اما

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{y^3}$$

در نقاط $(x_0, 0)$ روی محور x ها پیوسته و کراندار نیستند .

قضیه ۲ . ۳ را می‌توان به‌فرم زیر بیان نمود .

قضیه ۲ . ۴ . فرض کنید توابع $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ در ناحیه مستطیل شکل شامل (x_0, y_0)

$$x_1 < x < x_2 \quad , \quad y_1 < y < y_2$$

پیوسته و کراندار باشند، آنگاه یک فاصله $(x_0 - h, x_0 + h)$ وجود دارد بطوری که روی این فاصله جواب منحصر بفردی برای معادله زیر وجود دارد .

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

تذکر ۱ : شرط کراندار بودن $\frac{\partial f}{\partial y}$، در قضیه وجود و یکتائی را می‌توان با شرط ضعیف‌تری، بنام **شرط لیپ شیتز***، عوض کرد .

تعریف ۲ . ۶ . فرض کنید تابع $f(x, y)$ در ناحیه مستطیل شکل

$$D : x_1 \leq x \leq x_2 \quad , \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

پیوسته باشد . آنگاه می‌گوییم $f(x, y)$ در یک شرط لیپ شیتز در D صدق می‌کند . اگر

$$|f(\xi, \eta_1) - f(\xi, \eta_2)| \leq k\,|\eta_1 - \eta_2|$$

* Lipschitz Condition

برای (ξ,η_1) ، (ξ,η_2) در D وبرای ثابت k ، که به آن ثابت لیپ شینز گوئیم .

در مثال زیر نشان می‌دهیم که تابع داد، شده دارای شرط لیپ شینز می‌باشد حال آنکه، $\frac{\partial f}{\partial y}$ کراندار نیست .

مثال ۲ . ۸۸ .

$$f(x,y)=Ln\,|y|\cos x$$

نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{|y|}{y}\cos x$$

ملاحظه می‌شود که در نقاط $(x_0,0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود نیست . اما شرط لیپ شینز برقرار است، زیرا

$$\begin{aligned}|f(\xi,\eta_1)-f(\xi,\eta_2)| &= \big|\,|\eta_1|\cos\xi-|\eta_2|\cos\xi\,\big|\\ &= |\cos\xi|\,\big|\,|\eta_1|-|\eta_2|\,\big|\\ &\leqslant \big|\,|\eta_1|-|\eta_2|\,\big|\\ &\leqslant |\eta_1-\eta_2|\end{aligned}$$

پس شرط لیپ شینز برقرار است با $k=1$

قضیه ۲ . ۵ . اگر تابع $f(x,y)$ پیوسته و در یک شرط لیپ شینز در D صدق کند . آنگاه معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه

$$y'=f(x,y)\quad,\quad y(x_0)=y_0\quad,\quad (x_0,y_0)\in D$$

دارای یک جواب منحصر بفرد می‌باشد .

شرط لیپ شینز برای منحصر بفرد بودن جواب، ضروری است . به مثال زیر توجه کنید .

مثال ۲ . ۸۹ . معادله دیفرانسیل

$$y'=y^{2/3}\quad,\quad y(0)=0$$

یعنی

$$f(x,y)=y^{2/3}$$

را بررسی می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که تابع $f(x,y)$ پیوسته می‌باشد . حال شرط لیپ شینز را بررسی می‌کنیم

$$|f(\xi,\eta_1)-f(\xi,\eta_2)|=|\eta_1^{2/3}-\eta_2^{2/3}|$$

حال باید بررسی شود که آیا، k ای وجود دارد بقسمی که

$$|\eta_1^{2/3}-\eta_2^{2/3}|\leqslant k\,|\eta_1-\eta_2|$$

فرض می‌کنیم $\eta_2=0$ و $\eta_1>0$ ، آنگاه

$$\frac{1}{\eta_1^{1/3}}\leqslant k$$

و واضح است که با نزدیک شدن η_1 به صفر، $\frac{1}{\eta_1^{1/3}}$ از هر عدد مثبت بزرگتر می‌باشد . پس شرط لیپ شینز برقرار نیست . از طرفی معادله دارای جواب عمومی

$$y=\left(\frac{x+c}{3}\right)^3$$

می‌باشد که با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y=\frac{x^3}{27}$$

از طرفی $y=0$ نیز جواب معادله می‌باشد، یعنی معادله دارای جواب یکتا نیست . حال می‌خواهیم روشی برای پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه

$$y'=f(x,y)\quad,\quad y(x_0)=y_0$$

ارائه دهیم، اگر معادله در شرایط قضیه وجود ویکتائی صدق کند . آنگاه اگر با روشهای کلاسیک* قابل حل باشد که آنرا حل می‌کنیم و در غیر اینصورت از روش تکرار پیکارد استفاده می‌کنیم که در اینصورت یک دنباله از جواب‌های تقریبی $\{y_n(x)\}$ را بدست می‌آوریم .

حال فرض کنید D یک ناحیه مستطیل شکل با مرکز (x_0,y_0) باشد .

$$D=\{\,|x-x_0|<a\ ,\ |y-y_0|<b\,\}$$

در اینصورت طبق قضیه ۲ . ۴ . بازاء هر x در فاصله $x_0-h<x<x_0+h$ یک جواب منحصر بفرد وجود دارد . البته مقدار h از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)\quad,\quad M=\max|f(x,y)|$$

تذکر ۲ . وقتی از روش تکرار پیکارد استفاده می‌کنیم، خطای جواب $y_n(x)$ از جواب

---

* متغیرها از هم جدا، همگن، خطی و غیره

اصلی $y(x)$ معادله بوسیله نامساوی زیر بیان می‌شود .

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n$$

که در آن

$$N = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

مثال ۲.۹۰ . معادله دیفرانسیل

$$y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0$$

را حل می‌کنیم و فرض می‌کنیم

$$D = \{-1 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

حل . داریم

$$|f(x,y)| = x^2 + y^2 \leqslant 2 \Rightarrow M = 2$$

و $a = 1$ و $b = 1$

$$h = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

یعنی

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

حال با استفاده از روش تکرار پیکارد ، معادله را حل می‌کنیم

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (S^2)\,dS = \frac{1}{3}x^3$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x [S^2 + \frac{S^6}{9}]\,dS = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x [S^2 + \frac{S^6}{9} + \frac{2S^{10}}{3 \times 63} + \frac{S^{14}}{63^2}]\,dS$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

و قدر مطلق خطای جمله سوم از جواب اصلی

$$|y_3(x) - y(x)| \leqslant \frac{2}{3!}(\frac{1}{2})^3 2^2 = \frac{1}{6}$$

که

$$N = \max_D \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_D |2y| = 2$$

مثال ۲.۹۱ . بزرگترین h ای را پیدا کنید که برای آن وجود یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = 4 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0$$

را تضمین می‌کند .

حل .

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

و

$$|x| < a \quad , \quad |y| < b$$

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

از طرفی

$$D = \{(x,y) / \ |x| < a, |y| < b\}, \ f(x,y) = 4 + y^2$$

در نتیجه

$$M = \max_{|y|<b} |4 + y^2| < 4 + b^2$$

$$h = \min(a, \frac{b}{4 + b^2})$$

حال کمترین مقدار $\frac{b}{4+b^2}$ را بدست می‌آوریم ، برای اینکار نسبت به b مشتق می‌گیریم ، داریم

$$\frac{b^2 + 4 - 2b^2}{(4 + b^2)^2}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق ، داریم

$$4 - b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲.۹۲ . تمام جوابهای معادله با شرط اولیه

$$y' = 2\sqrt{y} \quad , \quad y(1) = 0$$

را پیدا کنید. کدامیک از آنها با استفاده از روش پیکارد باانتخاب $y_0 = 0$ حاصل می‌شود؟
آیا $2\sqrt{y}$ در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند؟
حل.

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\,dx$$

$$2y^{1/2} = 2x + c$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد.

$$y = (x + c)^2 \qquad (۱)$$

با توجه به شرط اولیه، داریم

$$y = (x - 1)^2 \qquad (۲)$$

حال اگر از (۱) نسبت به c مشتق بگیریم، داریم

$$0 = 2(x + c) \Rightarrow c = -x \qquad (۳)$$

و با حذف c، بین (۱) و (۳) داریم
جواب غیرعادی $\quad y = 0$
حال با استفاده از تکرار پیکارد، معادله را حل می‌کنیم

$$y_1 = 0 + \int_1^x 0\,dx = 0$$

$$y_2 = 0 + \int_1^x 0\,dx = 0$$

$$y_n = 0$$

و در نتیجه $y \equiv 0$، یعنی جواب غیرعادی، با روش پیکارد بدست آمد.
حال شرط لیپ شیتز را برای $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ بررسی می‌کنیم.

$$|f(\xi, \eta_1) - f(\xi, \eta_2)| = 2\,|\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\eta_2}|$$

باید بررسی کنیم که آیا وجود دارد، k ای که رابطه زیر برقرار باشد

$$2\,|\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\eta_2}| \leqslant k\,|\eta_1 - \eta_2|$$

با فرض $\eta_2 = 0$ و $\eta_1 > 0$، داریم

$$\frac{2}{\sqrt{\eta_1}} \leqslant k$$

واضح است که برای η_1 نزدیک صفر، $\frac{2}{\sqrt{\eta_1}}$ از هر عدد مثبت، بزرگتر است، پس شرط لیپ
شیتز، برقرار است.

مجموعه مسائل ۸۰۲

۱. نشان دهید، تابع زیر در شرط لیپ شیتز در صفحه xy صدق می‌کند. اما $\partial f/\partial y$ وجود ندارد

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

۲. نشان دهید معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه زیر، دارای جواب نیست

$$xy' = 3y \;,\; y(0) = 1$$

۳. بزرگترین مجموعه در صفحه xoy را مشخص کنید، که از هر نقطه این مجموعه یک و تنها یک جواب معادله $x\,dy = y\,dx$ بگذرد.

۴. نشان دهید

$$f(x, y) = |\sin y| + x$$

در شرط لیپ شیتز با $k = 1$ در تمام صفحه xoy صادق است ولی $\partial f/\partial y$ در $y = 0$ موجود نیست.

۵. معادله دیفرانسیل

$$xy' = 2y$$

را در نظر می‌گیریم. تمام شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ را پیدا کنید، بقسمی که معادله

الف: دارای جواب نباشد.
ب: بیش از یک جواب داشته باشد.
پ: دقیقاً یک جواب داشته باشد.

در تمرینهای ۶ الی ۱۲، ناحیه‌ای را پیدا کنید که معادلات داده شده دارای جواب منحصر بفرد باشند

۶. $y' = x\sqrt{1 - y^2}$

۷. $y' = x^2 - y^2$

۸. $y' = \dfrac{y}{y - x}$

۹. $y' = 1 + \tan y$

۱۰. $y' = x^2 + \sqrt{x - y^2}$

۱۱. $y' = Ln\,|4 - y^2|$

۱۲. $y' = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$

تمرینهای دوره‌ای فصل دوم

۱. $y' = (x - y)^2 + 1$

۲. $y' x \sin x + y(\sin x - x \cos x) = \sin x \cos x - x$

۳. $(5xy - 4y^2 - 6x^2)\,dx + (y^2 - 2xy + 6x^2)\,dy = 0$

۴. $(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0$

۵. $(1 + e^x)\,y y' = e^x \quad , \quad y(0) = 1$

۶. $y' \sin x = y\, Lny \quad , \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$

۷. $y + xy' = a(1 + xy), \quad y\left(\dfrac{1}{a}\right) = -a$

۸. $y^2 \sin x\, dx + \cos^2 x\, Lny\, dy = 0$

۹. $xy' = y + x \cos^2 \dfrac{y}{x}$

۱۰. $xy' = y(Lny - Lnx)$

۱۱. $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$

۱۲. $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$

۱۳. $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$

۱۴. $4y^6 + x^3 = 6xy^5 y'$

۱۵. $y' \cos x - y \sin x = 2x \quad , \quad y(0) = 0$

۱۶. $y' x\, Lnx - y = 3x^3 Ln^2 x$

۱۷. $(2x - y^2)\,y' = 2y$

*۱۸. $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$

۱۹. $2y'\, Lnx + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{y}$

۲۰. $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x$

۲۱. $y' - \tan y = e^x \dfrac{1}{\cos y}$

**۲۲. $y' = y(e^x + Lny)$

---

* راهنمائی: توابع $siny$ و $cosy$ را برحسب نصف قوس بیان کنید و قرار دهید $\tan\dfrac{y}{2} = z$

** راهنمائی: قرار دهید $Lny = u$

۲۳. $(y + \frac{2}{x^2})\,dx + (x - \frac{3}{y^2})\,dy = 0$

۲۴. $(2x + e^{x/y})\,dx + (1 - \frac{x}{y})\,e^{x/y}dy = 0$

۲۵. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0$

۲۶. $(\sin y - y\sin x + \frac{1}{x})\,dx + (x\cos y + \cos x - \frac{1}{y})\,dy = 0$

۲۷. $(y^2 - 3xy - 2x^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$

۲۸. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

۲۹. $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0$

۳۰. $y'^2 - yy' + e^x = 0$

۳۱. $y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0$

۳۲. $y = x\,\frac{1 + y'^2}{2y'}$

۳۳. $y = xy' - \frac{1}{y'}$

۳۴. $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$

۳۵. $y = -xy' + x^4 y'^2$

۳۶. $y(3 - 4y)^2 y'^2 = 4(1 - y)$

۳۷. $y = (1 + y')\,x + y'^2$

۳۸. معادله منحنی را پیدا کنید که از نقطه (۱ و ۱) گذشته و ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه مناسب با مربع عرض نقطه تماس باشد.

۳۹. معادله منحنی را پیدا کنید که از نقطه(2- , 0)گذشته و ضریب زاویه در هر نقطه، سه واحد بیش از عرض نقطه تماس باشد.

مسیرهای قائم منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

۴۰. $y^2 = 4(x - a)$

۴۱. $x^2 - y^2 = c$

۴۲. $x^2 + y^2 = 2cx$

۴۳. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم و بالاتر

مقدمه. در این فصل می‌خواهیم طریقهٔ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را بیان کنیم و روش حل را به مراتب بالاتر تعمیم دهیم. صورت کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه n ام، به‌فرم

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

می‌باشد. معادله (۱) را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

الف) معادلات دیفرانسیل خطی

ب) معادلات دیفرانسیل غیرخطی

معادلات دیفرانسیل خطی نیز خود به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

۲. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر

از آنجا که معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت از اهمیت بیشتری برخوردارند، لذا قسمت اعظم این فصل را به‌طریقه حل این نوع معادلات اختصاص داده‌ایم.

۱.۳ معادلات خطی مرتبه دوم

تعریف ۱.۳. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را **خطی** گوییم، اگر به فرم

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (1)$$

بیان شود.

تعریف ۲۰۳. اگر در معادلهٔ (۱) $r(x)\equiv 0$ باشد، معادلهٔ (۱) را همگن* و در غیر این صورت، غیرهمگن می‌گویند. صورت کلی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۲)$$

تعریف ۳۰۳. توابع $P(x)$ و $q(x)$ در معادله (۱) را ضرایب معادله می‌نامیم.

قضیه ۱۰۳. اگر توابع $P(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ روی فاصلهٔ باز $a_1<x<a_2$ پیوسته باشند، آنگاه یک و فقط یک تابع مانند $y=G(x)$ وجود دارد که در معادلهٔ

$$y''+P(x)y'+q(x)y=r(x)\ ,\ y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y_0$$

در یک نقطهٔ خاص x_0 در فاصله (a_1,a_2) صدق می‌کند.

مثال ۱۰۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$$

را بررسی می‌کنیم؛ می‌دانیم که جوابهای این معادله

$$y=\sin x\ ,\ y=\cos x$$

می‌باشد (چون در معادله صدق می‌کنند)، و با توجه به شرایط اولیه، $y=\sin x$ جواب منحصر بفرد معادله است.

مثال ۲۰۳. جواب منحصر بفرد معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0\ ,\quad a_1<x<a_2$$

را که در شرایط اولیه

$$y(x_0)=0\ ,\ y'(x_0)=0\ ,\quad a_1<x_0<a_2$$

صدق می‌کند را پیدا کنید.

حل. $y=0$ در معادله صدق می‌کند و در شرایط اولیه نیز صدق می‌کند. پس جواب

* H0mogeneous

منحصر بفرد معادله، $y=0$ می‌باشد.

قضیه ۲۰۳. اگر $y_1=G(x)$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۱)$$

باشد، آنگاه $y=cG(x)$ (c ثابت دلخواه) نیز یک جواب معادله خواهد بود.

اثبات. طبق تعریف جواب، کافیست نشان دهیم که $y=cG(x)$ و مشتقاتش در معادله صدق می‌کند.

$$y=cG(x)\ ,\ y'=cG'(x)\ ,\ y''=cG''(x) \qquad (۲)$$

در معادلهٔ (۱) بجای y'',y',y ، (۲) را قرار می‌دهیم.

$$cG''(x)+P(x)cG'(x)+q(x)cG(x)=$$
$$c(G''(x)+P(x)G'(x)+q(x)G(x))=0$$

عبارت داخل پرانتز صفر است چون فرض کرده بودیم که $G(x)$ جواب معادلهٔ (۱) است. پس $y=cG(x)$ در معادله صدق می‌کند؛ یعنی جواب معادله است.

قضیه ۳۰۳. اگر y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۱)$$

باشند، آنگاه y_1+y_2 نیز یک جواب برای (۱) می‌باشد.

اثبات. باید نشان دهیم y_1+y_2 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

$$y_1''+y_2''+P(x)(y_1'+y_2')+q(x)(y_1+y_2)=$$
$$(y_1''+P(x)y_1'+q(x)y_1)+(y_2''+P(x)y_2'+q(x)y_2)=0$$

هر دو پرانتز برابر صفر هستند، زیرا فرض کرده بودیم که y_1 و y_2 جوابهای (۱) هستند.

تذکر ۱. از قضایای ۲۰۳. و ۳۰۳. نتیجه می‌گیریم که اگر y_1 و y_2 دو جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، همگن باشند، در این صورت $c_1y_1+c_2y_2$ نیز یک جواب خواهد بود.

تذکر ۲. قضایای ۲.۳ و ۳.۳ فقط برای معادلات خطی همگن برقرار است (از هرمرتبه دلخواه n) و برای معادلات غیرخطی و غیرهمگن برقرار نیست. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۳.۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - 2y' - 3y = 2 \qquad (۱)$$

دارای جوابهای

$$y_1 = e^{3x} - \frac{2}{3} \quad , \quad y_2 = e^{-x} - \frac{2}{3}$$

می‌باشد. زیرا در معادله صدق می‌کنند. برای نشان دادن این مطلب، کافیست y_1 و y_1' و y_1'' را در (۱) قرار دهیم.

$$y_1' = 3e^{3x} \quad , \quad y_1'' = 9e^{3x}$$

در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$9x^{3x} - 6e^{3x} - 3e^{3x} + 2 = 2$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نشان داد که $y_2 = e^{-x} - \frac{2}{3}$ نیز یک جواب (۱) می‌باشد.
ولی بطور مثال، $3y_1$ در معالهٔ (۱) صدق نمی‌کند، زیرا

$$3y_1 = 3e^{3x} - 2 \quad , \quad (3y_1)' = 9e^{3x} \quad , \quad (3y_1)'' = 27e^{3x}$$

در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$27e^{3x} - 18e^{3x} - 9e^{3x} + 6 \neq 2$$

و همین‌طور $y_1 + y_2$ نیز در معادله صدق نمی‌کند، زیرا

$$y_1 + y_2 = e^{3x} + e^{-x} - \frac{4}{3} \quad , \quad (y_1 + y_2)' = 3e^{3x} - e^{-x}$$

$$(y_1 + y_2)'' = 9e^{3x} + e^{-x}$$

در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$9e^{3x} + e^{-x} - 6e^{3x} + 2e^{-x} - 3e^{3x} - 3e^{-x} + 4 \neq 2$$

مثال ۴.۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$yy'' = xy' \qquad (۱)$$

دارای جوابهای

$$y_1 = x^2 \quad , \quad y_2 = 5$$

می‌باشد. نشان می‌دهیم که y_1 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

$$y_1 = x^2 \quad , \quad y_1' = 2x \quad , \quad y_1'' = 2$$

در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$x^2(2) = x(2x)$$

$y_2 = 5$ نیز در معادله صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم بطور مثال $-x^2$ در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند، زیرا

$$-y_1 = -x^2 \quad , \quad (-y_1)' = -2x \quad , \quad (-y_1)'' = -2 \qquad (۲)$$

(۲) را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$(-x^2)(-2) \neq x(-2x)$$

یعنی $-y_2$ جواب معادله نیست. بطریق مشابه نشان می‌دهیم که $y_1 + y_2$ درمعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند.

$$y_1 + y_2 = x^2 + 5 \quad , \quad (y_1 + y_2)' = 2x \quad , \quad (y_1 + y_2)'' = 2 \qquad (۳)$$

(۳) را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$(x^2 + 5)(2) \neq x(2x)$$

مثال ۵.۳. نشان دهید که اگر y_1 یک جواب معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (۱)$$

و y_2 یک جواب معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (۲)$$

باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ یک جواب برای (۱) خواهد بود.

حل. فرض می‌کنیم $h(x) = y_1 + y_2$؛ حال باید نشان دهیم که $h(x)$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند،

$$h(x) = y_1 + y_2 \quad , \quad h'(x) = y_1' + y_2' \quad , \quad h''(x) = y_1'' + y_2'' \qquad (۳)$$

(۳) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$y_1'' + y_2'' + P(x)(y_1' + y_2') + q(x)(y_1 + y_2) =$$

$$(y_1'' + P(x)y_1' + q(x)y_1) + (y_2'' + P(x)y_2' + q(x)y_2) = r(x) \qquad (۴)$$

پرانتز دوم (۴) برابر صفر است. زیرا فرض کرده بودیم y_2 یک جواب (۲) باشد، و پرانتز اول (۴) برابر با $r(x)$ می‌باشد، زیرا y_1 یک جواب (۱) است.

مجموعه مسائل ۱.۳

۱. نشان دهید

$$y_1 = \cos 2x \quad , \quad y_2 = \sin 2x$$

جوابهای معادلهٔ

$$y'' + 4y = 0$$

می‌باشند و $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز یک جواب معادله است.

۲. نشان دهید

$$y_1 = e^{-2x} \quad , \quad y_2 = x e^{-2x}$$

جوابهای معادلهٔ زیر می‌باشند.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

۳. نشان دهید

$$y_1 = e^{x} \cos 2x \quad , \quad y_2 = e^{x} \sin 2x$$

جوابهای معادلهٔ زیر می‌باشند.

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

۴. نشان دهید

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

جوابهای معادلهٔ زیر می‌باشند.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

۵. نشان‌دهید

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = x \ln x$$

جوابهای معادلهٔ زیر می‌باشند.

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

۶. ثابت کند اگر y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x)$$

باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ یک جواب برای معادله فوق نیست.

۲.۳ معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

تعریف ۴.۳ معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم

(۱)
$$y'' + ay' + by = 0$$

را معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت می‌نامیم که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ مقادیر ثابت هستند و دامنه x محور x ها می‌باشد.

چطور معادله را حل کنیم؟. می‌دانیم که جواب معادلهٔ خطی همگن مرتبه اول با ضریب ثابت، یعنی $y' + ky = 0$ بصورت $y = ce^{-kx}$ می‌باشد. زیرا

(۲)
$$y' + ky = 0 \Rightarrow dy + ky\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + k\,dx = 0$$

و (۲) از نوع متغیرها از هم جدا می‌باشد. و با انتگرال‌گیری از طرفین (۲) داریم

$$\int \frac{dy}{y} + k\int dx = c_1 \Rightarrow \ln|y| + kx = c_1$$

$$\ln|y| = c_1 - kx$$

$$y = e^{c_1 - kx}$$

$$= ce^{-kx}$$

پس طبیعی است که حدس زده شود: ممکن است $y = e^{tx}$ یک جواب (۱) باشد؛ البته اگر t بطور مناسب انتخاب شود. حال این جواب و مشتقاتش را در (۱) قرار می‌دهیم و t را طوری تعیین می‌کنیم که $y = e^{tx}$ در معادله صدق کند.

(۳)
$$y = e^{tx} \quad , \quad y' = te^{tx} \quad , \quad y'' = t^2 e^{tx}$$

(۳) را در (۱) می‌گذاریم

(۴)
$$t^2e^{tx} + ate^{tx} + be^{tx} = e^{tx}(t^2 + at + b)$$

آیا (۴) می‌تواند صفر باشد (یعنی e^{tx} جواب (۱) باشد). پاسخ مثبت است، زیرا اگر t ریشه معادله $t^2 + at + b = 0$ انتخاب شده بود، (۴) صفر می‌شد. پس برای حل معادله (۱)، ابتدا معادلهٔ

(۵)
$$t^2 + at + b = 0$$

را که به آن **معادلهٔ مفسر** یا **معادلهٔ شاخصی*** می‌گوییم را تشکیل می‌دهیم. و ریشه‌های (۵) را بدست می‌آوریم. چون (۵) یک معادلهٔ درجه دوم با ضرایب حقیقی می‌باشد، پس سه حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول. معادلهٔ مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد $(a^2 - 4b > 0)$

اگر این دو ریشه را با t_1 و t_2 نشان دهیم، آنگاه

---

* Characteristic equation

$$y_1 = e^{t_1 x} \quad , \quad y_2 = e^{t_2 x}$$

جوابهای (۱) می‌باشند.

مثال ۶.۳. جوابهای معادلهٔ زیر

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

را پیدا کنید.

حل. ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

و سپس ریشه‌های آن‌را بدست می‌آوریم

$$t = 1 \pm \sqrt{1+3} \ , \ t_1 = 3 \ , \ t_2 = -1$$

پس $y = e^{-x}$ و $y = e^{3x}$ جوابهای معادله می‌باشند.

می‌خواهیم بررسی کنیم که حواب عمومی چگونه بدست می‌آید. می‌دانیم که جواب عمومی باید شامل دو پارامتر ثابت مستقل باشد (یعنی اینکه جواب را نتوان به‌فرمی تبدیل کرد که شامل کمتر از دو پارامتر ثابت دلخواه باشد). از طرفی بر طبق قضایای ۲.۳ و ۳.۳ و تذکر ۱. بخش قبل می‌دانیم اگر y_1، y_2 دو جواب (۱) روی یک فاصله باشند، آنگاه

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

که در آن c_1، c_2 ثابت‌های دلخواه هستند نیز یک جواب برای (۱) می‌باشد. (روی همان فاصله) و چون این جواب به دو پارامتر ثابت دلخواه بستگی دارد، پس می‌تواند جواب‌عمومی معادله باشد. به‌شرط آنکه نتوان آنرا تبدیل به عبارتی کرد که شامل کمتر از دو پارامتر باشد.

اکنون به بررسی این مطلب می‌پردازیم که y_1، y_2 باید چه شرایطی داشته باشند تا چنین تبدیلی امکان‌پذیر نباشد:

تعریف ۵.۳. دو تابع $y_1(x)$، $y_2(x)$ را روی فاصله $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ مستقل خطی گوییم اگر برای هر x در این فاصله

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

تنها اگر $c_1 = c_2 = 0$ و بستگی خطی دارند اگر

$$y_1(x) = k\, y_2(x) \quad \text{یا} \quad y_2(x) = \ell\, y_1(x) \qquad \forall x \in [x_0, x_1]$$

(k و ℓ دو عدد ثابت می‌باشند.)

تذکر ۱. اگر $y_1(x) \equiv 0$ یا $y_2(x) \equiv 0$ روی فاصله $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ باشد. آنگاه y_1، y_2 بستگی خطی دارند. و در بقیه حالات y_1، y_2 بستگی خطی دارند اگر و فقط اگر y_1/y_2 برابر با یک مقدار ثابت باشد. پس اگر y_1/y_2 تابعی از x باشد (به x بستگی داشته باشد) در این صورت y_1، y_2 مستقل خطی هستند.

مثال ۷.۳. توابع

$$y_1 = 6x \quad , \quad y_2 = 5x$$

بستگی خطی دارند. زیرا

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{6x}{5x} = \frac{6}{5}$$

مثال ۸.۳. توابع

$$y_1 = e^{2x} \quad , \quad y_1 = e^{x}$$

مستقل خطی‌اند، زیرا

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^{x}}$$

$$= e^{x}$$

تذکر ۲. اگر y_1، y_2 دو جواب معادلهٔ (۱) باشند و بستگی خطی داشته باشند، یعنی $\frac{y_1}{y_2} = k$ (k عدد ثابت) در این صورت

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

تبدیل به عبارتی می‌شود که شامل یک پارامتر دلخواه است، زیرا

$$\begin{aligned} y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) &= c_1 k\, y_2(x) + c_2 y_2(x) \\ &= (c_1 k + c_2)\, y_2(x) \\ &= c\, y_2(x) \end{aligned}$$

تذکر ۳. اگر y_1، y_2 دو جواب معادلهٔ (۱) و مستقل خطی باشند، چنین تبدیلی امکان‌پذیر نیست.

صورت $y_1 = e^{t_1 x}$ و $y_2 = e^{t_2 x}$ ($t_1 \neq t_2$ ریشه‌های معادلهٔ مفسر هستند) جوابهای معادلهٔ (۱) خواهند بود و چون

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x}$$

مخالف مقدار ثابت است ، پس y_1 ، y_2 مستقل خطی‌اند و در نتیجه

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} \qquad (۶)$$

شامل دو پارامتر ثابت می‌باشد و (۶) جواب عمومی معادلهٔ (۱) است .

مثال ۹.۳ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + 2y' - 15y = 0$$

را بنویسید .

حل . ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{1+15}, \quad t_1 = 5, \quad t_2 = -3$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$$

مثال ۱۰.۳ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4 \qquad (۱)$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 - t - 6 = 0$$

ریشه‌های معادلهٔ مفسر $t_1 = -2$ و $t_2 = 3$ می‌باشند . بنابراین ، جواب عمومی معادله

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} \qquad (۲)$$

می‌باشد . از (۲) مشتق می‌گیریم ، داریم

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} \qquad (۳)$$

و شرایط اولیه را در (۲) و (۳) قرار می‌دهیم ، داریم

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2 \\ -4 = -2c_1 + 3c_2 \end{cases} \qquad (۴)$$

از حل دستگاه (۴) داریم $c_1 = 13/5$ و $c_2 = 2/5$. بنابراین جواب معادلهٔ (۱)

$$y = \frac{1}{5}(3e^{-2x} + 2e^{3x})$$

می‌باشد .

حالت دوم . معادلهٔ مفسر دارای دو ریشه متمایز مختلط یا موهومی باشد $(a^2 - 4b < 0)$

اگر مبین معادلهٔ مفسر $(a^2 - 4b)$ منفی باشد در این صورت جوابهای معادلهٔ مفسر به‌صورت

$$t_1 = p + iq, \quad t_2 = p - iq$$

خواهد بود . در نتیجه جوابهای معادلهٔ (۱) به‌فرم

$$y_1 = e^{(p+iq)x}$$

و

$$y_2 = e^{(p-iq)x}$$

می‌شوند و چون

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(p+iq)x}}{e^{(p-iq)x}} = e^{2iqx}$$

مخالف مقدار ثابت می‌باشد ، پس جواب عمومی معادلهٔ (۱) به فرم

$$y(x) = c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x} \qquad (۷)$$

است . از طرفی طبق فرمول **اولر***، می‌دانیم

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

و با انتخاب

---

* Euler's Formula

$$c_1 = \frac{1}{2}(A - iB)\ ,\quad c_2 = \frac{1}{2}(A + iB)$$

(۷) به‌فرم

$$y(x) = e^{px}\left(\left(\frac{A - iB}{2}\right)(\cos qx + i\sin qx) + \left(\frac{A + iB}{2}\right)(\cos qx - i\sin qx)\right)$$

$$= e^{px}(A\cos qx + B\sin qx) \qquad (۸)$$

بیان می‌شود ، واضح است که $e^{px}\cos qx$ و $e^{px}\sin qx$ مستقل خطی هستند .

توجه ۲ . اگر معادله‌ٔ مفسر دارای دو ریشه‌بصورت $p \pm iq$ باشد ، در این صورت ، جواب عمومی معادله‌ٔ (۱) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y(x) = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx) \qquad (۹)$$

مثال ۱۱.۳ . جواب عمومی معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

را بنویسید

حل . ابتدا معادله‌ٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^2 + 2t + 10 = 0$$

سپس ریشه‌های معادله‌ٔ مفسر را پیدا می‌کنیم

$$t = -1 \pm \sqrt{1 - 10}\ ,\quad t_1 = -1 + 3i\ ,\quad t_2 = -1 - 3i$$

$$p = -1\ ,\quad q = 3$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

$$y = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

مثال ۱۲.۳ . جواب عمومی معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

را بنویسید

حل . معادله‌ٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

$$t^2 - 4t + 5 = 0$$

$$t = 2 \pm \sqrt{4 - 5}$$

$$= 2 \pm i$$

و جواب عمومی

$$y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

مثال ۱۳.۳ . معادله‌ٔ دیفرانسیل با شرایط اولیه

$$8y'' + 4y' + y = 0\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . معادله‌ٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

$$t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} = 0$$

$$t = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{8}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از :

$$y = e^{-\frac{x}{4}}\left(A\cos\frac{x}{4} + B\sin\frac{x}{4}\right) \qquad (۲)$$

از (۲) مشتق می‌گیریم ، داریم

$$y' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(A\cos\frac{x}{4} + B\sin\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(-A\sin\frac{x}{4} + B\cos\frac{x}{4}\right) \qquad (۳)$$

با توجه به شرایط اولیه و (۲) و (۳) داریم

$$0 = e^0(A\cos 0 + B\sin 0)$$

$$= A$$

$$1 = -\frac{1}{4}e^0(0 + B\sin 0) + \frac{1}{4}e^0(-0 + B\cos 0)$$

$$= \frac{1}{4}B$$

یعنی $A=0$ ، $B=4$. پس جواب معادله عبارت است از

$$y=4e^{-x/4}\sin\frac{x}{4}$$

مثال ۱۴۰۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-2y'+10y=0 \ , \ y(0)=-1 \ , \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \qquad (1)$$

را حل کنید.*

حل. معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

$$t^2-2t+10=0$$

$$t=1\pm\sqrt{1-10}=1\pm 3i$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از

$$y=e^x(A\cos 3x+B\sin 3x)$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم

$$-1=e^0(A\cos 0+B\sin 0)$$
$$=A$$
$$1=e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\frac{3\pi}{2}+B\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=-e^{\frac{\pi}{2}}B$$

و جواب معادله به‌فرم زیر می‌باشد.

$$y=e^x\left(-\cos 3x-e^{-\frac{\pi}{2}}\sin 3x\right).$$

حالت سوم. معادلهٔ مفسر دارای ریشه مضاعف باشد. ($a^2-4b=0$)

در این حالت ریشه‌های معادلهٔ مفسر، مساوی هستند. یعنی $t_1=t_2=t$ ، پس یک جواب معادله

$$y_1=e^{tx} \ , \ t=-\frac{a}{2}$$

حال برای پیدا کردن جواب دوم که با جواب اول مستقل خطی باشد، از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم وجواب دوم را به‌فرم

---

* یک جنس معادله دیفرانسیلی را مسالهٔ با مقدار مرزی گویند.

$$y_2(x)=u(x)y_1(x)=u(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

در نظر **می‌گیریم** ، برای تعیین $u(x)$ ، y_2 ، y'_2 ، y''_2 را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$y'_2(x)=-\frac{a}{2}\,u(x)e^{-\frac{a}{2}x}+u'(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y''_2(x)=\frac{a^2}{4}\,u(x)e^{-\frac{a}{2}x}-au'(x)e^{-\frac{a}{2}x}+u''(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

در (۱) جایگذاری می‌کنیم. البته‌چون $a^2-4b=0$ است پس $b=a^2/4$ و معادلهٔ (۱) به‌فرم زیر است

$$y''+ay'+\frac{a^2}{4}y=0$$

$$e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}u(x)-au'(x)+u''(x)-\frac{a^2}{2}u(x)+au'(x)+\frac{a^2}{4}u(x)\right)=0$$

و در نتیجه

$$u''(x)=0 \Rightarrow u(x)=c_2x$$

(ثابت دوم انتگرال را می‌توان حذف کرد)

و $$y_2(x)=c_2xe^{-\frac{a}{2}x}$$

و جواب عمومی بفرم زیر می‌باشد

$$y(x)=(c_1+c_2x)e^{-\frac{a}{2}x} \qquad (10)$$

مثال ۱۵۰۳. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-6y'+9y=0$$

را بنویسید

حل. معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا پیدا می‌کنیم

$$t^2-6t+9=0$$

$$(t-3)^2=0 \Rightarrow t=3 \qquad \text{ریشه مضاعف}$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

$$y=(c_1+c_2x)e^{3x}$$

مجموعه مسائل ۲۰۳

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید .

۱. $y''-3y'+2y=0$

۲. $y''-6y'+25y=0$

۳. $y''-3y'=0$

۴. $y''+2y'+2y=0$

۵. $y''+y'+2y=0$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید .

۶. $y''+3y'+2y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=2$

۷. $y''+9y=0\ ,\ y(0)=2\ ,\ y'(0)=9$

۸. $y''-4y'+4y=0\ ,\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=-6$

۹. $y''+y'+3y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

۱۰. $y''+5y'+6y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$

۱۱. $y''+2\pi y'+\pi^2 y=0\ ,\ y(1)=1\ ,\ y'(1)=\frac{1}{\pi}$

۱۲. $4y''+20y'+25y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$

۱۳. نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ

$$y''-y=0$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت .

$$y(x)=C_1\cos hx+C_2\sin hx$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرائب ثابت ، را طوری پیدا کنید که توابع زیر جوابهای آن باشند .

۱۴. $1\ ,\ e^{3x}$

۱۵. $e^{(-1-3i)x}\ ,\ e^{(-1+3i)x}$

۱۶. $e^{-x}\ ,\ xe^{-x}$

۱۷. $e^{2x}\ ,\ e^{-x}$

۱۸. $e^{2x}\cos 2x\ ,\ e^{2x}\sin 2x$

۱۹. $e^{-x}\cos x\ ,\ e^{-x}\sin x$

۳۰۳. معادلات خطی همگن از مرتبهٔ دلخواه n با ضرایب ثابت

صورت کلی یک معادلهٔ خطی همگن از مرتبهٔ دلخواه n ، به‌فرم

$$y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\dots+f_{n-1}(x)y'+f_n(x)y=0 \qquad (1)$$

می‌باشد $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ را ضرایب می‌نامند . حال اگر ضرایب همگی ثابت باشند (۱) به‌فرم

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (2)$$

درمی‌آید . برای حل (۲) همان روش را که درمورد معادلات خطی همگن مرتبهٔ دوم با

ضرایب ثابت بیان کردیم، اعمال می‌کنیم.

آیا $y=e^{tx}$ می‌تواند یک جواب (۲) باشد؟ برای پاسخ به این سئوال کافیست $y=e^{tx}$ و مشتقاتش را در (۲) قرار دهیم.

$$y=e^{tx}\ ,\ y'=t\,e^{tx}\ ,\ \dots\ ,\ y^{(n)}=t^n\,e^{tx} \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) داریم،

$$e^{tx}\,(\,t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_{n-1}t+a_n\,) \qquad (۴)$$

(۴) می‌تواند صفر باشد، اگر t ریشه معادلهٔ زیر انتخاب شود.

$$t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_{n-1}t+a_n=0 \qquad (۵)$$

(۵) را **معادلهٔ مفسر** گویند. و چون معادله مفسر یک کثیرالجمله از درجه n با ضرایب حقیقی می‌باشد. پس دارای n ریشه است و در نتیجه

$$y_1=e^{t_1x}\ ,\ y_2=e^{t_2x}\ ,\ \dots\ ,\ y_n=e^{t_nx}$$

جوابهای (۲) می‌باشد ($t_1,t_2,\dots,t_n$ ریشه‌های (۵) هستند)

قضیهٔ ۴.۳. اگر $y_1,y_2,\dots,y_n$ ، n جواب معادلهٔ (۲) باشند. در این صورت

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n \qquad (۶)$$

نیز یک جواب (۲) می‌باشد.

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۳.۳ خواهد بود.

آیا (۶) می‌تواند جواب عمومی معادلهٔ (۲) باشد؟

می‌دانیم اگر (۶) بخواهد جوای عمومی (۲) گردد، باید دارای n پارامتر ثابت مستقل باشد یعنی نتوانیم (۶) را به‌فرمی بنویسیم که تعداد پارامترها کمتر از n تا شود.

تعریف ۶.۳. توابع $y_1,y_2,\dots,y_n$ را روی فاصله I ، گوییم بستگی خطی دارند. اگر بتوان لااقل یکی از آنها را به‌صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت به‌عبارت دیگر،

$$k_1y_1+k_2y_2+\dots+k_ny_n=0 \qquad (۷)$$

در ضمن تمام "k_i"ها صفر نباشند. و اگر (۷) تنها وقتی برقرار گردد که تمام "k_i"ها صفر باشند، گوییم توابع $y_1,y_2,\dots,y_n$ مستقل خطی هستند.

با توجه به تعریف ۶.۳، (۶) می‌تواند جواب عمومی (۲) روی‌فاصله I باشد، بشرط‌آنکه

$y_1,y_2,\dots,y_n$ روی فاصله I مستقل خطی باشند.

قضیه ۵.۳. اگر توابع $y_1,y_2,\dots,y_n$ روی فاصلهٔ $[a,b]$ وابسته خطی باشند، آنگاه روی فاصله $[a,b]$، دترمینان زیر برابر صفر خواهد بود.

$$W(x)=W[y_1,y_2,\dots,y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\dots y_n \\ y_1' & y_2'\dots y_n' \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)}\dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$w(x)$ را "رونسکین *" $y_1,y_2,\dots,y_n$ می‌نامند.

اثبات. فرض کنید

$$k_1y_1+k_2y_2+\dots+k_ny_n=0$$

یک ترکیب خطی از $y_1,y_2,\dots,y_n$ روی فاصلهٔ $[a,b]$ است و تمام "k_i"ها صفر نیستند؛ در این صورت دستگاه زیر

$$\begin{cases} k_1y_1+k_2y_2+\dots+k_ny_n=0 \\ k_1y_1'+k_2y_2'+\dots+k_ny_n'=0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_1y_1^{(n-1)}+k_2y_2^{(n-1)}+\dots+k_ny_n^{(n)}=0 \end{cases}$$

همگن می‌باشد. و می‌دانیم

$$k_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\ k_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,\ \dots\ ,\ k_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

دستگاه فوق دارای جواب غیرصفری باشدمشروط بر آنکه دترمینان ضرایب یعنی

* Wronskian

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ y'_1 & y'_2 \dots y'_n \\ \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

برای تمام $x \varepsilon [a, b]$، صفر باشد، یعنی

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$$

قضیه ۶.۳. اگر توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

$$y^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

روی فاصله $[a, b]$ باشند آنگاه

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ y'_1 & y'_2 \dots y'_n \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

درتمام نقاط $[a, b]$ نمی‌تواند صفر باشد

تعریف ۷.۳. اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ جوابهای مستقل خطی در فاصله‌ای مانند I برای (۲) باشند، در این صورت مجموعهٔ y_1 و y_2 و ... و y_n را یک پایهٔ جوابهای (۲) در I می‌نامیم و

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

جواب عمومی معادله (۲) خواهد بود.

مثال ۱۶.۳. نشان دهید که توابع

$$y_1 = e^{-x}\ ,\ y_2 = e^{x}\ ,\ y_3 = x e^{x}$$

یک پایه برای جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \qquad (۱)$$

تشکیل می‌دهد.

حل. ابتدا باید نشان داد که y_1, y_2, y_3 در معادله صدق می‌کنند. برای این کار باید y_1, y'_1, y''_1, y'''_1 را در معادله گذاشت

$$y_1 = e^{-x}\ ,\ y'_1 = -e^{-x}\ ,\ y''_1 = e^{-x}\ ,\ y'''_1 = -e^{-x} \qquad (۲)$$

(۲) را در (۱) می‌گذاریم

$$-e^{-x} - e^{-x} + e^{-x} + e^{-x} = 0$$

پس y_1 یک جواب (۱) می‌باشد و بهمین ترتیب نشان می‌دهیم y_2, y_3 نیز جوابهای (۱) هستند.

پس رونسکی y_1, y_2, y_3 را تشکیل می‌دهیم

$$w = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & x e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} & e^{x} + x e^{x} \\ e^{-x} & e^{x} & 2e^{x} + x e^{x} \end{vmatrix}$$

با استفاده از دستور ساروس

$$\left|\begin{matrix} e^{-x} & e^{x} & x e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} & e^{x}(1+x) \\ e^{-x} & e^{x} & e^{x}(2+x) \end{matrix}\right| \begin{matrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \\ e^{-x} & e^{x} \end{matrix}$$

$$= e^{x}(2+x) + e^{x}(1+x) - x e^{x} - (x e^{x} + e^{x}(1+x) - e^{x}(2+x))$$

$$= 4e^{x} \neq 0$$

مثال ۱۷.۳. نشان دهید

$$y_1 = e^{-x}\ ,\ y_2 = e^{2x}$$

استقلال خطی دارند.

حل. رونسکی y_1, y_2 را تشکیل می‌دهیم

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 3e^{x} \neq 0$$

پس y_1 و y_2 استقلال خطی دارند

مثال ۱۸.۳. می‌دانیم توابع

$$x^2 , 3x^2$$

وابستگی خطی دارند. نشان دهیم که رونسکین آنها برابر صفر می‌باشد.

$$W(x^2 , 3x^2) = \begin{vmatrix} x^2 & 3x^2 \\ 2x & 6x \end{vmatrix} = 6x^3 - 6x^3 = 0$$

حال برمی‌گردیم به بررسی راهی برای پیدا کردن جواب عمومی معادله (۲). با توجه به مطالب گفته شده، ابتدا باید ریشه‌های معادلهٔ مفسر را پیدا کنیم و سپس با استفاده از ریشه‌های معادله مفسر، جوابهای مستقل خطی $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ را می‌نویسیم. چون معادلهٔ مفسر یک کثیرالجمله از درجه n با ضرایب حقیقی می‌باشد، پس حالات زیر را بررسی می‌کنیم

حالت اول. معادلهٔ مفسر دارای n ریشه متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_n$ باشد در این صورت جوابهای

$$y_1 = e^{t_1 x} , y_2 = e^{t_2 x} , \ldots , y_n = e^{t_n x}$$

مستقل خطی هستند* پس جواب عمومی معادلهٔ (۲) به فرم

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} + \ldots + c_n e^{t_n x}$$

می‌باشد.

مثال ۱۹.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

را بنویسید.

* رونسکین y_1 و y_2 و ... و y_n مخالف صفر است. از طرفی می‌توانیم برای بررسی استقلال خطی y_1 و y_2 و ... و y_n، دو تا دوتا برهم تقسیم کنیم؛ اگر خارج قسمت تمام تقسیم‌ها مخالف مقدار ثابت باشد، آنگاه y_1 و y_2 و ... و y_n مستقل خطی هستند.

حل. ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - 2t^2 - 3t = 0$$

$$t = 0 , t = 3 , t = -1$$

جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}$$

حالت دوم. معادلهٔ مفسر دارای n ریشه حقیقی باشد ولی m تای آنها مساوی. فرض کنید $t_1 = t_2$ است؛ در این صورت $y_1 = e^{t_1 x}$ ، $y_2 = x e^{t_1 x}$ و y_3 ، y_4 ، ... ، y_n مانند حالت اول بوده و اگر معادلهٔ مفسر دارای سه ریشه مساوی باشد مانند $t_1 = t_2 = t_3$ در این صورت $y_1 = e^{t_1 x}$ ، $y_2 = x e^{t_1 x}$ ، $y_3 = x^2 e^{t_1 x}$ و y_4 ، ... ، y_n مانند حالت اول خواهد بود. و بطور کلی اگر معادلهٔ مفسر دارای m ریشه مساوی باشد مانند $t_1 = t_2 = \ldots = t_m$ در این صورت

$$y_1 = e^{t_1 x} , y_2 = x e^{t_1 x} , y_3 = x^2 e^{t_1 x} , \ldots , y_m = x^{m-1} e^{t_1 x}$$

و $y_{m+1} , \ldots , y_n$ مانند حالت اول هستند.

مثال ۲۰.۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' - y'' = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - t^2 = 0$$

در نتیجه، ریشه‌های معادلهٔ مفسر عبارتند از: ۰ و ۰ و ۱

$$t_1 = t_2 = 0 , t_3 = 1$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

مثال ۲۱.۳. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

را بنویسید.

حل. ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0$$

$$(t - 1)^2 (t + 1) = 0$$

پس ریشه‌های معادلهٔ مفسر عبارتند از :

$$t_1=t_2=1 \;,\; t_3=-1$$

و

$$y_1=e^{x} \;,\; y_2=xe^{x} \;,\; y_3=e^{-x}$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=(c_1+c_2x)e^{x}+c_3e^{-x}$$

مثال ۲۲.۳ ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'''-2y''-4y'+8y=0$$

را بنویسید .

حل . ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3-2t^2-4t+8=0$$

$$t^2(t-2)-4(t-2)=0$$

$$(t-2)(t^2-4)=(t-2)^2(t+2)=0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1=t_2=2 \;,\; t_3=-2$$

و

$$y_1=e^{2x} \;,\; y_2=xe^{2x} \;,\; y_3=e^{-2x}$$

و جواب عمومی معادله به‌فرم زیر است :

$$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3e^{-2x}$$

مثال ۲۳.۳ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(4)}-2y''+y=0$$

را بنویسید .

حل . ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^4-2t^2+1=0$$

$$(t^2-1)^2=(t-1)^2(t+1)^2=0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1=t_2=1 \;,\; t_3=t_4=-1$$

$$y_1=e^{x} \;,\; y_2=xe^{x} \;,\; y_3=e^{-x} \;,\; y_4=xe^{-x}$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=(c_1+c_2x)e^{x}+(c_3+c_4x)e^{-x}$$

حالت سوم . معادلهٔ مفسر دارای ریشه مختلط، هم باشد
فرض کنید $t_1=p+iq$, $t_2=p-iq$ ، وبقیه‌ریشه‌ها حقیقی باشند. در این صورت در جواب
عمومی بجای $c_1y_1+c_2y_2$ عبارت

$$e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$$

را می‌نویسیم .

مثال ۲۴.۳ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'''-4y''+5y'=0$$

را بنویسید .

حل . ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3-4t^2+5t=0$$

$$t(t^2-4t+5)=0$$

$$t=0 \;,\; t^2-4t+5=0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1=0 \;,\; t_2=2+i \;,\; t_2=2-i$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=C_1+e^{2x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$$

مثال ۲۵.۳ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(4)}-y=0$$

را بنویسید .

حل . معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^4-1=0$$

$$(t^2+1)(t-1)(t+1)=0$$

و ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1=i \;,\; t_2=-i \;,\; t_3=1 \;,\; t_4=-1$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر است :

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^{x} + C_4e^{-x}$$

حالت چهارم : معادلهٔ مفسر دارای ریشه مختلط تکراری باشد

فرض کنید ، پس از تجزیه معادلهٔ مفسر ، قسمتی که ریشهٔ مختلط دارد ، تکراری باشد ، یعنی به توان m . در این صورت $2m$ جواب مربوط به این قسمت به‌صورت زیر خواهد بود ،

$$C_1e^{px}\cos qx\ ,\ C_2e^{px}\sin qx$$

$$C_3x\,e^{px}\cos qx\ ,\ C_4x\,e^{px}\sin qx$$

$$C_5x^2e^{px}\cos qx\ ,\ C_6x^2e^{px}\sin qx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{2m-1}x^{m-1}e^{px}\cos qx\ ,\ C_{2m}x^{m-1}e^{px}\sin qx$$

و آنرا به‌صورت زیر بیان می‌کنیم

$$e^{px}(C_1 + C_2x + \dots + C_mx^{m-1})\cos qx$$
$$+\,e^{px}(C_{m+1} + C_{m+2}x + \dots + C_{2m}x^{m-1})\sin qx$$

مثال ۳ . ۲۶ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$$

را بنویسید .

حل . ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^6 + t^4 - t^2 - 1 = 0$$
$$t^4(t^2+1) - (t^2+1) = 0$$
$$(t^2+1)^2(t-1)(t+1) = 0$$

پس معادلهٔ مفسر دارای ریشه‌های $t_1 = 1\ ,\ t_2 = -1\ ,\ t_3 = t_4 = i\ ,\ t_5 = t_6 = -i$ می‌باشد و جواب عمومی به‌فرم زیر است ،

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x$$

تذکر . با انتخاب سمبول

$$D = \frac{d}{dx}\ ,\ D^2 = \frac{d^2}{dx^2}\ ,\ \dots\ ,\ D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت (۲) ، به‌فرم زیر نوشته می‌شود

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n)y = 0 \qquad (۸)$$

عبارت داخل پرانتز (۸) را با $F(D)$ نمایش می‌دهیم و معادله را معمولاً بصورت $F(D)y = 0$ می‌نویسیم وآنرا **اپراتور*** دیفرانسیل‌خطی مرتبه n ام می‌نامیم .

مثال ۳ . ۲۷ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(4)} - y''' - 4y'' + 4y' = 0 \qquad (۱)$$

را می‌توان به‌فرم

$$(D^4 - D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0 \qquad (۲)$$

نشان داد . و می‌دانیم برای حل معادلهٔ (۱) ، باید معادلهٔ مفسر را تشکیل داد

$$t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t = 0$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید ریشه‌های معادلهٔ مفسر و ریشه‌های معادلهٔ

$$D^4 - D^3 - 4D^2 + 4D = 0$$

یکی است . پس اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل‌بصورت $F(D)y = 0$ داده شده باشد و $F(D)$ یک چند جمله‌ای اپراتوری باشد ، می‌توانیم ریشه‌های معادلهٔ مفسررا از $F(D) = 0$ بدست آوریم .

مثال ۳ . ۲۸ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$D(D-1)(D+3)y = 0$$

را بنویسید .

حل . با توجه‌به $F(D)$ ، ریشه‌های معادلهٔ مفسر ،

$$t_1 = 0\ ,\ t_2 = 1\ ,\ t_3 = -3$$

* Operator

می‌باشد و جواب عمومی بفرم زیر است :

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-3x}$$

مثال ۳.۲۹. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$D(D^2+1)(D-2)^3y=0$$

را بنویسید.

حل. با توجه به $F(D)$، ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1=0\,,\ t_2=i\,,\ t_3=-i\,,\ t_4=t_5=t_6=2$$

و جواب عمومی عبارت است از :

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+(C_4+C_5x+C_6x^2)e^{2x}$$

مثال ۳.۳۰. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل .

$$D^2(D-1)^3(D^2+4)^2(D^2+2D+2)(D+1)y=0$$

را بنویسید.

حل. با توجه به $F(D)$، ریشه‌های معادله مفسر

$$t_1=t_2=0\,,\ t_3=t_4=t_5=1\,,\ t_6=t_7=2i\,,\ t_8=t_9=-2i$$

$$t_{10}=-1+i\,,\ t_{11}=-1-i\,,\ t_{12}=-1$$

و جواب عمومی

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x+C_5x^2)e^x+(C_6+C_7x)\cos 2x$$

$$+(C_8+C_9x)\sin 2x+e^{-x}(C_{10}\cos x+C_{11}\sin x)+C_{12}e^{-x}$$

مثال ۳.۳۱. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'''-3y''+3y'-y=0 \qquad (1)$$

را با شرایط اولیه

$$y(0)=1\,,\ y'(0)=2\,,\ y''(0)=3$$

پیدا کنید.

حل. ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$t^3-3t^2+3t-1=0$$

ریشه‌های معادلهٔ مفسر عبارتند از :

$$t_1=1\,,\ t_2=1\,,\ t_3=1$$

و جواب عمومی معادله

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x \qquad (2)$$

برای پیدا کردن ضرائب $c_3\,,c_2\,,c_1$ ، با توجه به $y(0)=1$ و (۲) داریم

$$1=c_1$$

از (۲) مشتق می‌گیریم

$$y'=(c_2+2c_3x)e^x+(1+c_2x+c_3x^2)e^x \qquad (3)$$

با توجه به $y'(0)=2$ و (۳) داریم

$$2=c_2+1 \Rightarrow c_2=1$$

از (۳) مشتق می‌گیریم

$$y''=(2c_3)e^x+(1+2c_3x)e^x+(1+2c_3x)e^x+(1+x+c_3x^2)e^x \qquad (4)$$

با توجه به $y''(0)=3$ و (۴) داریم

$$3=2c_3+1+1+1 \Rightarrow c_3=0$$

و جواب خصوصی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=(1+x)e^x$$

مجموعه مسائل ۳.۳.

رونسکین توابع زیر را پیدا کنید.

۱. $2\,,\ x$

۲. $x\,,\ \dfrac{1}{x}$

۳. $e^x\,,\ 2e^x\,,\ e^{-x}$

۴. $4\,,\ \sin^2 x\,,\ \cos 2x$

۵. $2\,,\ \cos x\,,\ \cos 2x$

نشان دهید توابع داده شده، پایه‌ای برای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل متناظر تشکیل می‌دهند.

۶. $e^{-x}\ ,\ x e^{-x}\ ,\ x^2 e^{-x}\ ,\ y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

۷. $x\ ,\ x^2\ ,\ x^3\ ,\ x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

معادلهٔ دیفرانسیلی را بنویسید که توابع داده شده جوابهای مستقل خطی آن باشند.

۸. $e^x\ ,\ x e^x\ ,\ x^2 e^x$

۹. $1\ ,\ x\ ,\ e^{2x}\ ,\ x e^{2x}$

۱۰. $1\ ,\ e^{-2x}\ ,\ e^{-x}\ ,\ e^x\ ,\ e^{2x}$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بنویسید.

۱۱. $(D^3 + D^2 - 2D)y = 0$

۱۲. $(D^4 - 6D^3 + 12D^2 - 8D)y = 0$

۱۳. $(D^4 + 4D^2)y = 0$

۱۴. $(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 0$

۱۵. $(D^3 - D^2 + 9D - 9)y = 0$

۱۶. $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$

۱۷. $(D^5 + 2D^3 + D)y = 0$

۱۸. $D(D+3)^2(D^2 + 4D + 13)y = 0$

۱۹. $D^3(D^2+9)^3(D-1)^2(D+1)y = 0$

۳. ۴. معادلات خطی غیرهمگن مرتبهٔ دوم

صورت کلی این معادلات به‌فرم

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x) \qquad (1)$$

می‌باشد. $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را ضرایب می‌نامند.

قضیهٔ ۳. ۷. جواب عمومی معادلهٔ (۱) به‌فرم مجموع دو جواب $y_h(x)$، $y_p(x)$ می‌باشد. که $y_h(x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر یعنی

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

است و y_p یک جواب ساده بدون پارامتر، معادله (۱) می‌باشد.
یعنی جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر است.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \qquad (3)$$

اثبات. $y(x)$ و مشتق اول و مشتق دوم $y(x)$ را در (۱) قرار می‌دهیم.

$$y'(x) = y_h'(x) + y_p'(x)$$

$$y''(x) = y_h''(x) + y_p''(x)$$

$$y_h''(x) + y_p''(x) + f_1(x)(y_h'(x) + y_p'(x)) + f_2(x)(y_h(x) + y_p(x)) = f_3(x)$$

$$(y_h''(x) + f_1(x)y_h'(x) + f_2(x)y_h(x)) + y_p''(x) + f_1(x)y_p'(x) + f_2(x)y_p(x) = f_3(x)$$

چون $y_h(x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر می‌باشد. پس پرانتز اول عبارت بالا برابر صفر خواهد بود. و چون $y_p(x)$ جواب (۱) است، پس تساوی بالا برقرار بوده، یعنی (۳) در (۱) صدق می‌کند و چون $y_h(x)$ شامل دو پارامتر مستقل می‌باشد پس $y(x)$ نیز شامل دو پارامتر مستقل است. بنابراین (۳) جواب عمومی (۱) خواهد بود.

قضیه ۳. ۸. اگر در (۱)، $f_3(x)$ به‌فرم مجموع چند تابع به‌فرم زیر باشد

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_k(x) \qquad (4)$$

و فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_1(x)$$

و $y_2(x)$ یک جواب معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_2(x)$$

و بهمین ترتیب، $y_k(x)$ یک جواب معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_k(x)$$

باشد. آنگاه

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_k(x)$$

یک جواب (۴) خواهد بود.

(اثبات به‌عنوان تمرین به‌عهده خواننده)

مثال ۳.۳۲. نشان دهید، $y_p = e^x$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + y = 2e^x \qquad (1)$$

می‌باشد و سپس جواب عمومی معادله (۱) را بنویسید.

حل. باید y_p و مشتق دوم y_p را در معادلهٔ (۱) گذاشت و نشان داد که اتحاد برقرار است.

$$y_p'' = e^x \;,\; y_p = e^x \qquad (2)$$

(۲) را در (۱) می‌گذاریم،

$$e^x + e^x = 2e^x$$

برای بدست آوردن جواب عمومی (۱)، باید جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را پیدا کنیم.

$$y'' + y = 0 \qquad (3)$$

برای حل (۳)، معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$$

و

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x \end{aligned}$$

مثال ۳.۳۳. نشان دهید $y_p = x \sin x$ یک جواب، معادله

$$y'' + y = 2\cos x \qquad (1)$$

می‌باشد.

حل. y_p و y_p'' را در (۱) می‌گذاریم و نشان می‌دهیم که اتحاد برقرار است.

$$y_p = x \sin x \;,\; y_p'' = 2\cos x - x \sin x \qquad (2)$$

(۲) را در (۱) می‌گذاریم،

$$2\cos x - x \sin x + x \sin x = 2\cos x$$

مثال ۳.۳۴. با استفاده از مثالهای ۳.۳۲ و ۳.۳۳، جواب عمومی معادلهٔ

$$y'' + y = 2e^x + 2\cos x$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن را می‌نویسیم. با توجه به مثال ۳.۳۲، داریم

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

و

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= e^x + x \sin x \end{aligned}$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x + x \sin x \end{aligned}$$

حال روش بدست آوردن جواب خصوصی $y_p(x)$ را بررسی می‌کنیم. چند روش در بخشهای آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد. ولی ساده‌ترین آنها روشی است موسوم به روش ضرایب *نامعین**. حسن این روش، در مقایسه با روشهای دیگر که بعداً گفته خواهد شد، سادگی آن است. از این روش فقط درمورد معادلات خطی با ضرایب ثابت می‌توان استفاده کرد.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (5)$$

و $f(x)$ باید تابعی باشد که در حالتهای مختلف ذکر می‌شود. در این روش سعی می‌کنیم y_p را مشابه با $f(x)$ انتخاب کنیم.

روش ضرایب نامعین. از این روش فقط در حالات زیر می‌توان استفاده کرد:

حالت اول. اگر $f(x)$ (۵) به‌فرم یک چند جمله‌ای از درجه n باشد.

مثال ۳.۳۵. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - 4y = 3 \qquad (1)$$

* Undetermined coefficients

را بنویسید .

حل . ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم .

$$y'' - 4y = 0$$

معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌نماییم

$$t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t = \pm 2$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

حال برای بدست آوردن y_p ، چون $f(x)$ (طرف دوم معادله) یک عدد می‌باشد ، y_p را به‌صورت یک عدد انتخاب کرده یعنی $y_p = A$ ، حال y_p ، y''_p را در (۱) قرار می‌دهیم و A را مشخص می‌کنیم

$$y_p = A \ , \ y''_p = 0 \qquad (۲)$$

(۲) را در (۱) قرار می‌دهیم

$$0 - 4A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$$

و

$$y_p = -\frac{3}{4}$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1 e^{2x} + G_2 e^{-2x} - \frac{3}{4}$$

مثال ۳ . ۳۶ . جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' = 3 \qquad (۱)$$

را بنویسید .

حل . ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$y'' - 4y' = 0$$

معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب کرده

$$t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t = 0, 4$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر ،

$$y_h = G_1 + G_2 e^{4x}$$

می‌باشد . حال اگر y_p را به‌صورت یک عدد انتخاب کنیم ، مثلاً $y_p = A$ و y'_p و y''_p را در معادله (۱) قرار دهیم

$$y_p = A \ , \ y' = 0 \ , \ y'' = 0$$

$$0 = 3 \quad \lightning^{*}$$

علت آنکه y_p را نمی‌توان یک عدد انتخاب کرد آن است که در جواب عمومی معادله همگن c_1 وجود دارد و علت وجود c_1 در جواب عمومی معادله همگن ، وجود یک ریشه صفر معادله مفسر می‌باشد . حال y_p را به‌فرم $y_p = Ax$ انتخاب می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$y'_p = A \ , \ y''_p = 0 \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$0 - 4A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$$

و

$$y_p = -\frac{3}{4} x$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{3}{4} x$$

مثال ۳ . ۳۷ . جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + y = 4x^2 + 1 \qquad (۱)$$

را بنویسید .

حل . ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم .

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

و ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از : $t_1 = t_2 = -1$ و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

حال برای بدست آوردن y_p ، می‌گوییم : چون طرف دوم معادله ، یک چندجمله‌ای از

---

* علامت تناقض است

درجه ۲ می‌باشد، پس y_p را نیز یک چند جمله‌ای کامل از درجه ۲ انتخاب می‌کنیم.

$$y_p = A x^2 + B x + C$$

و برای تعیین ضرایب A و B و C، باید y_p و y'_p و y''_p را در (۱) قرار داد و با متحد قرار دادن ضرایب جملات متشابه، A و B و C را تعیین کرد.

$$y_p = A x^2 + B x + C \;,\; y'_p = 2 A x + B \;,\; y''_p = 2A \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$2A + 4Ax + 2B + Ax^2 + Bx + C \equiv 4x^2 + 1$$

$$\begin{cases} A = 4 \\ 4A + B = 0 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا خواهیم داشت

$$A = 4 \;,\; B = -16 \;,\; C = 25$$

و

$$y_p = 4x^2 - 16x + 25$$

و

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + 4x^2 - 16x + 25$$

مثال ۳. ۳۸. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y' = 2x \qquad (۱)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$y'' - y' = 0$$

$$t^2 - t = 0 \Rightarrow t = 0, 1$$

و

$$y_h = c_1 + c_2 e^x$$

اگر y_p را به‌فرم یک چندجمله‌ای درجه یک انتخاب کنیم، $y_p = Ax + B$، داریم:

$$y'_p = A \;,\; y''_p = 0 \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) خواهیم داشت،

$$0 - A = 2x$$

زیرا ضریب x یک طرف صفر و ضریب x طرف دیگر ۲ می‌باشد. علت اینکه y_p را نمی‌توان به‌فرم $y_p = Ax + B$ انتخاب‌کرد آن است که در جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر عامل c_1 وجود دارد و علت وجود عامل y_p در جواب عمومی معادلهٔ همگن، وجود یک ریشه صفر در معادلهٔ مفسر می‌باشد. لذا باید y_p را به‌فرم زیر انتخاب کرد:

$$y_p = x(Ax + B) \qquad (۳)$$

حال اگر مشتق اول و مشتق دوم (۳) را در (۱) جایگذاری کنیم، داریم

$$2A - 2Ax - B \equiv 2x$$

و A و B از حل دستگاه زیر پیدا می‌شوند

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow A = -1 \;,\; B = -2$$

و

$$y_p = x(-x - 2)$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2x$$

قانون کلی. اگر $f(x)$ (طرف دوم معادله) در (۵) به‌فرم یک چند جمله‌ای از درجه n باشد. جواب خصوصی را به‌فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$y_p = x^m \text{ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه } n \text{)} \qquad (۶)$$

که در (۶)، m تعداد ریشه‌های صفر معادلهٔ مفسر می‌باشد.

تذکر ۱. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۳. ۳۹. فرم جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' = x^3 + 1$$

را بنویسید.

حل. با توجه به اینکه صفر، دوبار، ریشه معادلهٔ مفسر معادلهٔ همگن متناظر می‌باشد، پس

$$y_p = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + cx + D)$$

حالت دوم. اگر $f(x)$ در (۵) به‌فرم

$$f(x) = M(x) e^{px}$$

باشد که $M(x)$ یک‌چندجمله‌ای از درجه n است.

مثال ۳.۴۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x} \qquad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, 2$$

و

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

برای پیدا کردن y_p، چون طرف دوم (۱) به‌صورت یک عدد در e^{4x} می‌باشد، پس y_p را به‌فرم $y_p = Ae^{4x}$ در نظر می‌گیریم و برای تعیین A، باید y_p و y'_p و y''_p را در (۱) قرار داد.

$$y_p = Ae^{4x}, \quad y'_p = 4Ae^{4x}, \quad y''_p = 16Ae^{4x} \qquad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم،

$$16Ae^{4x} - 12Ae^{4x} + 2Ae^{4x} \equiv 3e^{4x}$$

$$6A = 3 \Rightarrow A = 1/2$$

و

$$y_p = \frac{1}{2}e^{4x}$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر است:

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$$

مثال ۳.۴۱. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x \qquad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم،

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t = 1, 6$$

و

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{6x}$$

حال اگر y_p را به‌فرم

$$y_p = (Ax+B)e^x \qquad (2)$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$y'_p = Ae^x + (Ax+B)e^x, \quad y''_p = 2Ae^x + (Ax+B)e^x$$

با جایگذاری y_p و y'_p و y''_p در (۱) داریم

$$2Ae^x + (Ax+B)e^x - 7Ae^x - 7(Ax+B)e^x + 6(Ax+B)e^x \equiv xe^x - 2e^x$$

$$-5Ae^x \equiv xe^x - 2e^x$$

چون ضریب xe^x یک‌طرف (۱) و طرف دیگر صفر می‌باشد. علت آنکه نمی‌توان y_p را به فرم (۲) انتخاب نمود، آن است که عامل Be^x در جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر موجود است‌ست (c_1e^x) و علت وجود عامل c_1e^x در جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر، وجود یک ریشه ۱، معادلهٔ مفسری باشد. لذا باید y_p را به‌فرم زیر انتخاب نمود:

$$y_p = x(Ax+B)e^x$$

حال برای تعیین ضرایب A و B، باید y_p و مشتقاتش‌را در (۱) قرار دهیم

$$y'_p = e^x(Ax^2+Bx) + e^x(2Ax+B)$$

$$y''_p = e^x(Ax^2+Bx) + 2e^x(2Ax+B) + 2Ae^x$$

این مقادیر را در (۱) قرار می‌دهیم، داریم:

$$e^x[Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A - 7Ax^2 - 7Bx - 14Ax - 7B + 6Ax^2 + 6Bx] \equiv (x-2)e^x$$

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = \frac{9}{25}$$

و

$$y_p = x\left(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25}\right)e^x$$

و جواب عمومی معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1e^x + c_2e^{6x} + x\left(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25}\right)e^x$$

قانون کلی. اگر $f(x)$ در (۵) به‌فرم

$$f(x) = M(x)e^{px}$$

که در آن $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. آنگاه y_p را به‌فرم

$$y_p = x^m e^{px} \quad (\text{یک چندجمله‌ای کامل از درجه } n) \qquad (۷)$$

انتخاب می‌کنیم و m تعداد ریشه‌های مساوی p معادلهٔ مفسر می‌باشد.

تذکر ۲. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۳ . ۴۲. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x} \qquad (۱)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$$

و

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

چون $p = 2$، دو بار ریشهٔ معادلهٔ مفسر می‌باشد، پس باید y_p را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$y = Ax^2e^{2x}$$

و برای تعیین A، باید y_p و y'_p و y''_p را در (۱) قرار دهیم

$$y'_p = Ae^{2x}(2x + 2x^2), \quad y''_p = 2Ae^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$$

در (۱) قرار می‌دهیم، داریم

$$2Ae^{2x} = 5e^{2x} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{5}{2}x^2e^{2x}$$

مثال ۳ . ۴۳. فقط فرم جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = (x^2 + 3)e^{-x} + 4x$$

را بنویسید.

حل. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ مفسر معادلهٔ همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$t^4 + 2t^3 + t^2 = 0$$

$$t^2(t+1)^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0, \quad t_3 = t_4 = -1$$

جواب خصوصی، مجموع دو جواب خصوصی می‌باشد، یکی مربوط به $4x$؛ چون صفر دو بار ریشه معادلهٔ مفسر می‌باشد.

$$y_{p_1} = x^2(Ax + B)$$

و دیگری مربوط به $(x^2 + 3)e^{-x}$، از طرفی -1 دو بار ریشه معادلهٔ مفسر است. پس

$$y_{p_2} = x^2e^{-x}(cx^2 + Dx + E)$$

و

$$y_p = x^2(Ax + B) + x^2e^{-x}(cx^2 + Dx + E)$$

حالت سوم. اگر $f(x)$ در (۵) در فرم

$$f(x) = M(x)\cos qx + N(x)\sin qx \qquad (۸)$$

و $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، قانون کلی زیر را خواهیم داشت:

قانون کلی. اگر $f(x)$ در (۵) به فرم (۸) باشد. آنگاه y_p را به‌فرم

$$y_p = x^m [R(x)\cos qx + S(x)\sin qx] \qquad (۹)$$

انتخاب می‌کنیم که در (۹)، m تعداد ریشه‌های $iq+$ معادلهٔ مفسر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای کامل از درجه n می‌باشند و n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.

تذکر ۳. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۳ . ۴۴. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + 4y = 3\cos 5x \qquad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را می‌نویسیم

$$t^2 + 4 = 0 \Rightarrow t = \pm 2i$$

و

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

برای تعیین y_p، چون $5i$ ریشه معادلهٔ مفسر نیست، پس $m = 0$ و

$$y_p = A\cos 5x + B\sin 5x$$

برای پیدا کردن ضرایب A و B، y_p و y''_p را در (۱) قرار می‌دهیم

$$y''_p = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$$

$$-21A\cos 5x - 21B\sin 5x \equiv 3\cos 5x$$

$$A = -\frac{1}{7}, \quad B = 0$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{7}\cos 5x$$

مثال ۳. ۴۵. فقط فرم جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x$$

را بنویسید.

حل. با توجه به مثال ۳. ۴۴، ریشه‌های معادلهٔ مفسر $\pm 2i$ می‌باشد. و چون $+2i$ یک بار ریشه معادلهٔ مفسر است بنابراین y_p به‌فرم زیر می‌باشد.

$$y_p = x\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x\right]$$

مثال ۳. ۴۶. فقط فرم جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$D^2(D^2+1)^3(D-2)^2 y = x + (x+3)\sin x + x^2 e^{2x}$$

را بنویسید.

حل. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ مفسر را تعیین می‌کنیم

$$t_1 = t_2 = 0, \quad t_3 = t_4 = t_5 = i, \quad t_6 = t_7 = t_8 = -i, \quad t_9 = t_{10} = 2$$

و با توجه به ریشه‌های معادلهٔ مفسر داریم:

$$y_{p_1} = x^2(Ax + B)$$

$$y_{p_2} = x^3\left[(A_1x + B_1)\sin x + (A_2x + B_2)\cos x\right]$$

$$y_{p_3} = x^2(A_3x^2 + B_3x + C)e^{2x}$$

و

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

حالت چهارم. اگر $f(x)$ در (۵) به‌فرم

$$f(x) = e^{px}\left[M(x)\cos qx + N(x)\sin qx\right] \qquad (10)$$

و $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای باشند. قانون کلی زیر را خواهیم داشت:

قانون کلی. اگر $f(x)$ در (۵) به‌فرم (۱۰) باشد. آنگاه y_p را به‌فرم

$$y_p = x^m e^{px}\left[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx\right] \qquad (11)$$

انتخاب می‌کنیم بطوری‌که m تعداد ریشه‌های $p + iq$ معادلهٔ مفسر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای کامل از درجه n باشند و n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.

تذکر ۴. این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال ۳. ۴۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''' + y'' = e^x \cos x \qquad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را می‌نویسیم

$$t^3 + t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0, \quad t_3 = -1$$

و

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$$

و با توجه به (۱۱)

$$y_p = e^x\,(A\cos x + B\sin x)$$

برای تعیین ضرایب A و B، باید y''_p و y'''_p را حساب کرده و در (۱) قرار داد. نتیجه به‌صورت زیر می‌باشد.

$$e^x\,(-4A\sin x - 2A\cos x + 2B\cos x - 2B\sin x) = e^x\cos x$$

و A و B از حل دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -2A + 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{10}\ ,\ B = \frac{1}{5}$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر است:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^x\left(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right).$$

مثال ۳ . ۴۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - 4y' + 5y = (x+2)\,e^{2x}\sin x \qquad (1)$$

را بنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می‌نویسیم

$$t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm i$$

و

$$y_h = e^{2x}\,(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

و با توجه به (۱۱)

$$y_p = x\,e^{2x}\,[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x]$$

y_p و y'_p و y''_p را حساب کرده و در (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$y'_p = e^{2x}\,\{[(2A+C)x^2 + (2A+2B+D)x + B]\cos x +$$

$$[(2C-A)x^2 + (2D-B+2C)x + D]\sin x\}$$

$$y''_p = e^{2x}\{[(3A+4C)x^2 + (8A+3B+4D+4C)x + (2A+4B+2D)]\cos x$$
$$+[(-4A+3C)x^2 + (8C-4A-4B+3D)x + (4D-2B+2C)]\sin x\}$$

$$e^{2x}\,[4Cx\cos x + 2(A+D)\cos x - 4Ax\sin x + 2(C-B)\sin x] \equiv$$

با جایگذاری y_p و y'_p و y''_p در (۱) داریم

$$e^{2x}\,[4cx\cos x + 2(A+D)\cos x - 4Ax\sin x + 2(C-B)\sin x] \equiv$$
$$e^{2x}\,(x+2)\sin x$$

و ضرایب A و B و C و D از حل دستگاه زیر بدست می‌آیند

$$\begin{cases} C = 0 \\ A + D = 0 \\ -4A = 1 \\ 2(C-B) = 2 \end{cases}$$

$$C = 0\ ,\ A = -\frac{1}{4}\ ,\ D = \frac{1}{4}\ ,\ B = -1$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = e^{2x}\,(C_1\cos x + C_2\sin x) + x\,e^{2x}\left[\left(-\frac{1}{4}x - 1\right)\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right]$$

مثال ۳ . ۴۹. فقط فرم جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$D(D^2 - 2D + 2)^3(D^2+9)(D+1)^4 y = x^2 + x\sin x + 3e^{-x}$$
$$+ 1 + x^2 e^x\cos x + 5\cos 3x$$

را بنویسید.

حل. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ مفسر را مشخص می‌کنیم

$$t_1 = 0\ ,\ t_2 = t_3 = t_4 = 1+i\ ,\ t_5 = t_6 = t_7 = 1-i\ ,\ t_8 = 3i\ ,\ t_9 = -3i$$
$$t_{10} = t_{11} = t_{12} = t_{13} = -1$$

جواب خصوصی مربوط به $x^2 + 1$، چون صفر یک بار، ریشه معادلهٔ مفسر است، با توجه به فرمول (۶) خواهیم داشت

$$y_{p_1} = x\,(Ax^2 + Bx + C)$$

جواب خصوصی مربوط به $3e^{-x}$، چون ۱− چهاربار ریشه معادلهٔ مفسر است، باتوجه‌به‌فرمول (۷) خواهیم داشت.

$$y_{p_2} = D x^4 e^{-x}$$

جواب‌خصوصی مربوط به $x\sin x$ ، باتوجه به فرمول (۹)

$$y_{p_3}=(A_1x+B_1)\cos x+(A_2x+B_2)\sin x$$

جواب خصوصی مربوط به $5\cos 3x$ ، چون $3i+$ یک بار ریشهٔ معادلهٔ مفسر است، باتوجه به فرمول (۹) خواهیم داشت.

$$y_{p_4}=x(A_3\cos 3x+B_3\sin 3x)$$

وجواب خصوصی مربوط به $x^2e^x\cos x$ ، چون $i+1$ سه بار ریشهٔ معادلهٔ مفسر می‌باشد و باتوجه به فرمول (۱۱) داریم.

$$y_{p_5}=x^3e^x\left[(A_4x^2+B_4x+C_4)\cos x+(A_5x^2+B_5x+C_5)\sin x\right]$$

و

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}+y_{p_5}$$

مثال ۳.۵۰. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'''+y'=x^2+6\sin 2x+x\,e^{3x} \qquad (1)$$

رابنویسید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن را می‌نویسیم

$$t^3+t=0\Rightarrow t_1=0\ ,\ t_2=i\ ,\ t_3=-i$$

و

$$y_h=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$$

اول جواب خصوصی مربوط به x^2 را حساب می‌کنیم

$$y_{p_1}=x(A\,x^2+B\,x+C) \qquad (2)$$

$$y'_{p_1}=3A\,x^2+2B\,x+C\ ,\ y''_{p_1}=6A\,x+2B\ ,\ y'''_{p_1}=6A$$

در (۱) به جای y' و y''' از (۲) مقدار می‌گذاریم و متحد با x^2 قرار می‌دهیم،

$$6A+3A\,x^2+2B\,x+C\equiv x^2$$

A و B و C را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases}3A=1\\ 2B=0\\ 6A+C=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{3}\ ,\ B=0\ ,\ C=-2$$

$$y_{p_1}=\frac{1}{3}x^3-2x$$

سپس جواب خصوصی مربوط به $6\sin 2x$ را حساب می‌کنیم.

$$y_{p_2}=A_1\cos 2x+B_1\sin 2x$$

$$y'_{p_2}=-2A_1\sin 2x+2B_1\cos 2x$$

$$y''_{p_2}=-4A_1\cos 2x-4B_1\sin 2x$$

$$y'''_{p_2}=8A_1\sin 2x-8B_1\cos 2x$$

y'_{p_2} و y'''_{p_2} را در (۱) جایگذاری می‌کنیم و متحد با $6\sin 2x$ قرار می‌دهیم.

$$8A_1\sin 2x-8B_1\cos 2x-2A_1\sin 2x+2B_1\cos 2x\equiv 6\sin 2x$$

A_1 و B_1 را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases}6A_1=6\\ -6B_1=0\end{cases}\Rightarrow A_1=1\ ,\ B_1=0$$

$$y_{p_2}=\cos 2x$$

وبالاخره جواب خصوصی مربوط به $x\,e^{3x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y_{p_3}=e^{3x}(A_2x+B_2)$$

$$y'_{p_3}=3e^{3x}(A_2x+B_2)+A_2e^{3x}$$

$$y''_{p_3}=9e^{3x}(A_2x+B_2)+6A_2e^{3x}$$

$$y'''_{p_3}=27e^{3x}(A_2x+B_2)+27A_2e^{3x}$$

با جای‌گذاری در (۱) داریم:

$$27A_2e^{3x}+30e^{3x}(A_2x+B_2)+A_2e^{3x}\equiv x\,e^{3x}$$

A_2 و B_2 را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases}30A_2=1\\ 28A_2+30B_2=0\end{cases}\Rightarrow A_2=\frac{1}{30}\ ,\ B_2=-\frac{14}{450}$$

$$y_{p_3}=\frac{1}{30}e^{3x}\left(x-\frac{14}{15}\right)$$

و

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$$

وجواب عمومی به فرم زیر می‌شود .

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{1}{3}x^3 - 2x + \cos 2x + \frac{1}{30}e^{3x}\left(x - \frac{14}{15}\right)$$

مجموعه مسائل ۳.۴ .

۱. قضیه ۳.۰۸ . را اثبات کنید .

فقط فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید .

۲. $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$

۳. $y'' + 16y = \sin(4x+\beta)$ (β مقدار ثابت)

۴. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$

۵. $y'' - 4y' = x e^{4x}$

۶. $y'' - 7y' = (x-1)^2$

۷. $y'' + 2y' + 5y = e^x[(x+1)\cos 2x + 3\sin 2x]$

۸. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2\cos 3x - x\sin 3x)$

۹. $D(D^2+9)(D^2-8D+25)^2 y = x + x^2\sin 3x + x^2 e^{4x}\cos 3x$

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید .

۱۰. $y'' + y = \sin 2x$

۱۱. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$

۱۲. $y'' + y' + y = e^x\sin 3x$

۱۳. $y^{(4)} - y = e^x$

۱۴. $y'' - 9y = e^{3x} + \sin 3x$

۱۵. $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = x + e^{2x}$

۱۶. $y''' - 4y'' + y' - 4y = e^{4x}\sin x$

۱۷. $y''' + y'' = e^{-x} + 6x$

۱۸. $y^{(4)} - y = x e^x + \cos x$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید .

۱۹. $y'' + 4y = 12\cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

۲۰. $y'' + y = 3x\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

۲۱. $2y'' + y' = 8\sin 2x + e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

۳.۵ . روش عمومی برای حل معادلات خطی غیرهمگن (روش تغییر پارامترها)

فرض می‌کنیم ، درمعادله دیفرانسیل

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x) \tag{1}$$

$f_1(x)$ ، $f_2(x)$ و $f_3(x)$ دریک فاصله باز پیوسته باشند . برای پیدا کردن جواب خصوصی y_p از روش زیر که به روش تغییر پارامترها موسوم است استفاده می‌کنیم .

فرض کنید جواب عمومی معادله همگن متناظر موجود باشد ؛ یعنی داشته باشیم

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2}$$

جواب y_p را مانند y_h درنظر می‌گیریم با این تفاوت که مقادیر ثابت را به‌عنوان توابعی از x تلقی خواهیم کرد .

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 \tag{3}$$

$$y_p' = u'(x)y_1 + u(x)y_1' + v'(x)y_2 + v(x)y_2'$$

$u(x)$ و $v(x)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0 \tag{4}$$

باتوجه به شرط (۴) داریم ؛

$$y_p' = u(x)y_1' + v(x)y_2' \tag{5}$$

$$y_p'' = u'(x)y_1' + u(x)y_1'' + v'(x)y_2' + v(x)y_2'' \tag{6}$$

باجایگذاری (۳) و (۵) و (۶) در (۱) داریم ،

$$u(x)(y_1'' + f_1(x)y_1' + f_2(x)y_1) + v(x)(y_2'' + f_1(x)y_2' + f_2(x)y_2) + u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x)$$

چون y_1 و y_2 جوابهای معادله همگن متناظر (۱) می‌باشند پس دو پرانتز طرف‌چپ عبارت بالا صفر هستند .

بنابراین ،

$$u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x) \tag{7}$$

حال $u'(x)$ و $v'(x)$ را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0 \\ u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = f_3(x) \end{cases}$$

وطبق دستور کرامر، داریم ،

$$(\text{۸})\quad u'(x) = -\frac{f_3(x)\,y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} \quad , \quad v'(x) = \frac{f_3(x)\,y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}$$

وچون y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی هستند پس

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$$

می‌باشد وبا انتگرال‌گیری از (۸) داریم :

$$u(x) = -\int \frac{f_3(x)\,y_2}{W}\,dx \quad , \quad v(x) = \int \frac{f_3(x)\,y_1}{W}\,dx$$

و

$$(\text{۹})\quad y_p = -y_1 \int \frac{f_3(x)\,y_2}{W}\,dx + y_2 \int \frac{f_3(x)\,y_1}{W}\,dx$$

(برای انتگرالها، ثابت انتگرال‌گیری منظور نمی‌کنیم) ،اگرثابت‌های انتگرال‌گیری‌منظور شوند ،جواب عمومی بدست می‌آید .

مثال ۵۱۰۳. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos^3 x}$$

رابنویسید .

حل . ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن متناظر رامی‌نویسیم

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm i$$

$$y_h = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

وفرض می‌کنیم

$$y_1 = e^{-x}\cos x \quad , \quad y_2 = e^{-x}\sin x$$

برای محاسبه W، y_1' و y_2' را حساب می‌کنیم

$$y_1' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x \quad , \quad y_2' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = e^{-2x}$$

$$y_p = -e^{-x}\cos x \int \frac{e^{-2x}\sin x}{e^{-2x}\cos^3 x}\,dx + e^{-x}\sin x \int \frac{e^{-2x}\cos x}{e^{-2x}\cos^3 x}\,dx$$

$$= -e^{-x}\cos x \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + e^{-x}\sin x \int \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{-x}\frac{1}{\cos x} + e^{-x}\sin x \tan x$$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2\cos x}$$

وجواب عمومی به فرم زیر می‌باشد :

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{2\cos x}\right)$$

مثال ۵۲۰۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}\,Ln\,x$$

راحل کنید .

حل . ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر رامی‌نویسیم

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = -1$$

و

$$y_h = (c_1 + c_2x)\,e^{-x}$$

وفرض می‌کنیم

$$y_1 = e^{-x} \quad , \quad y_2 = x\,e^{-x}$$

برای محاسبه W، y_1' و y_2' را حساب می‌کنیم

$$y_1' = -e^{-x} \quad , \quad y_2' = e^{-x} - x\,e^{-x} \quad , \quad W = e^{-2x}$$

وطبق فرمول (۹) داریم ،

$$y_p = -e^{-x}\int \frac{4e^{-2x}x\,Ln\,x}{e^{-2x}}\,dx + x\,e^{-x}\int \frac{4e^{-2x}Ln\,x}{e^{-2x}}\,dx$$

$$= -4e^{-x}\int x\,Ln\,x\,dx + 4x\,e^{-x}\int Ln\,x\,dx$$

$$= -4e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}Ln\,x - \frac{x^2}{4}\right) + 4x\,e^{-x}(x\,Ln\,x - x)$$

وجواب عمومی به فرم زیر می‌باشد :

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2x) + x^2e^{-x}(2\,Ln\,x - 3)$$

مثال ۵۳.۳. نشان دهید $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad (۱)$$

می‌باشند وسپس جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{6}{x} \qquad (۲)$$

رابنویسید .

حل . y_1 ، y_1' و y_1'' را در (۱) قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که اتحادبرقراراست .

$$y_1 = x \ , \ y_1' = 1 \ , \ y''_1 = 0$$

$$0 - 2x + 2x = 0$$

باروش مشابه نشان می‌دهیم که y_2 نیز یک جواب (۱) می‌باشد

$$y_2 = x^2 \ , \ y_2' = 2x \ , \ y_2'' = 2$$

$$2x^2 - 4x^2 + 2x^2 = 0$$

پس جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر (۲) عبارتست از :

$$y_h = c_1x + c_2x^2$$

فرض می‌کنیم ،

$$y_1 = x \ , \ y_2 = x^2$$

داریم ،

$$y_1' = 1 \ , \ y_2' = 2x \ , \ W = y_1y_2' - y_2y_1' = x^2$$

حال طرفین (۲) رابر ضریب y'' یعنی x^2 تقسیم می‌کنیم ،

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{6}{x^3}$$

وطبق فرمول (۹) داریم :

$$y_p = -x\int\frac{\frac{6x^2}{x^3}}{x^2}dx + x^2\int\frac{\frac{6x}{x^3}}{x^2}dx$$

$$= -x\int 6x^{-3}dx + x^2\int 6x^{-4}dx$$

$$= x^{-1}$$

وجواب عمومی به فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1x + c_2x^2 + x^{-1}$$

مثال ۵۴.۳. نشان دهید $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^3y'' + x^2y' - xy = 0 \qquad (۱)$$

می‌باشندوسپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$x^3y'' + x^2y' - xy = \frac{x}{1+x} \qquad (۲)$$

رابنویسید .

حل . y_1 و y_1' و y_1'' را در (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$y_1 = x \ , \ y_1' = 1 \ , \ y_1'' = 0$$

$$0 + x^2 - x^2 = 0$$

وبطور مشابه نشان می‌دهیم که y_2 نیز یک جواب (۱) می‌باشد .
حال طرفین (۲) رابر ضریب y'' یعنی x^3 تقسیم می‌کنیم . داریم

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2(1+x)} \qquad (۳)$$

وجواب عمومی معادله همگن متناظر (۳) عبارتست از

$$y_h = c_1x + c_2\frac{1}{x}$$

وفرض می‌کنیم

$$y_1 = x \ , \ y_2 = \frac{1}{x}$$

و

$$y_1' = 1 \ , \ y_2' = \frac{-1}{x^2} \ , \ W = y_1y_2' - y_2y_1' = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$$

$$y_p = -x\int\frac{\frac{1}{x^3(1+x)}}{-2/x}dx + \frac{1}{x}\int\frac{\frac{1}{x(1+x)}}{-2/x}dx$$

$$= \frac{x}{2}\int\frac{1}{x^2(1+x)}dx - \frac{1}{2x}\int\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{x} - Ln\,x + Ln(1+x)\right) - \frac{1}{2x}Ln(1+x)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{2}Ln\,x + \frac{x^2-1}{2x}Ln(1+x)$$

وجواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$y = c_1x + c_2\frac{1}{x} + \frac{x^2-1}{2x}Ln(1+x) - \frac{1}{2} - \frac{x}{2}Ln x$$

تذکر. این روش برای معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دلخواه نیز صادق است.

در حالت کلی برای حل یک معادله خطی غیرهمگن از مرتبه n ، ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را بدست می‌آوریم،

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

و y_p را به‌فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2 + \dots + v_ny_n \qquad (10)$$

که "v_i"ها $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ، توابعی از x می‌باشند. برای محاسبه "v_i"ها، ابتدا "v'_i"ها را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم و سپس انتگرال می‌گیریم*

$$\begin{aligned}
&v'_1y_1 + v'_2y_2 + \dots + v'_ny_n = 0\\
&v'_1y'_1 + v'_2y'_2 + \dots + v'_ny'_n = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&v'_1y_1^{(n-2)} + v'_2y_2^{(n-2)} + \dots + v'_ny_n^{(n-2)} = 0\\
&v'_1y_1^{(n-1)} + v'_2y_2^{(n-1)} + \dots + v'_ny_n^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}$$

($f(x)$ ، طرف دوم معادله خطی غیرهمگن می‌باشد)

مثال ۳.۵۵. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' + 4y'' - 5y' = e^{3x} \qquad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می‌نویسیم،

$$t^3 + 4t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0, 1, -5$$

و

$$y_h = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-5x} \qquad (2)$$

* اگر ثابتهای انتگرالگیری را ثابت کنیم جواب عمومی بدست می‌آید.

سپس با فرض $y_1 = 1$ و $y_2 = e^x$ و $y_3 = e^{-5x}$ و با توجه به فرمول (۱۰) جواب خصوصی را به‌فرم زیر در نظر می‌گیریم،

$$y_p = v_1 + v_2e^x + v_3e^{-5x} \qquad (3)$$

و برای محاسبه v_1 و v_2 و v_3 ابتدا v'_1 و v'_2 و v'_3 را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{cases}
v'_1 + v'_2e^x + v'_3e^{-5x} = 0\\
0 + v'_2e^x - 5v'_3e^{-5x} = 0\\
0 + v'_2e^x + 25v'_3e^{-5x} = e^{3x}
\end{cases}$$

$$v'_1 = -\frac{-1}{5}e^{3x}, \quad v'_2 = \frac{1}{6}e^{2x}, \quad v'_3 = \frac{1}{30}e^{8x}$$

و با انتگرال‌گیری داریم:

$$v_1 = \frac{-1}{15}e^{3x}, \quad v_2 = \frac{1}{12}e^{2x}, \quad v_3 = \frac{1}{240}e^{8x}$$

با جایگذاری v_1 و v_2 و v_3 در (۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{15}e^{3x} + \frac{1}{12}e^{3x} + \frac{1}{240}e^{3x}\\
&= \frac{1}{48}e^{3x}
\end{aligned}$$

و جواب عمومی (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-5x} + \frac{1}{48}e^{3x}$$

مثال ۳.۵۶. معادله دیفرانسیل

$$y''' - 2y'' + y' = e^x$$

را حل کنید.

حل. ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می‌نویسیم،

$$t^3 - 2t^2 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \ t_2 = t_3 = 1$$

و

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x$$

و جواب خصوصی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y_p = v_1 + v_2 e^x + v_3 x e^x$$

و از حل دستگاه زیر، v_1' و v_2' و v_3' را بدست آورده و سپس انتگرال می‌گیریم تا v_1 و v_2 و v_3 بدست آیند

$$\begin{cases} v_1' + v_2' e^x + v_3' x e^x = 0 \\ 0 + v_2' e^x + v_3' e^x + v_3' x e^x = 0 \\ 0 + v_2' e^x + 2 v_3' e^x + v_3' x e^x = e^x \end{cases}$$

$$v_1' = e^x \ , \ v_2' = -1 - x \ , \ v_3' = 1$$

$$v_1 = e^x \ , \ v_2 = -x - \frac{x^2}{2} \ , \ v_3 = x$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right)$$

مجموعه مسائل ۳ . ۵ .

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید . برای بدست آوردن y_p ، از روش تغییر پارامترها استفاده شود .

۱. $y'' + 4y' + 4y = e^x$

۲. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

۳. $y'' + 4y = 2(x - \sin 2x)$

۴. $y'' + 9y = e^x + \sin 4x$

۵. $y''' + 3y'' - 4y' = \cos 2x$

۶. $y'' + y = \tan x$

۷. $y'' + 4y = \sec 2x$

۸. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^2$

۹. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$

۱۰. $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$

۱۱. $y + 4y = \sec x \tan x$

۱۲. $y'' + 9y = \sec x \csc x$

۱۳. $y'' + 9y = \csc 2x$

۱۴. $9y'' + y = \tan^2 \dfrac{x}{3}$

۱۵. $y''' + y' = \tan x$

۱۶. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \ln x$

۱۷. نشان دهید، $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$ و $y_2 = \dfrac{\sin x}{x}$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

می‌باشند، و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید .

$$xy'' + 2y' + xy = x$$

۱۸. نشان دهید، $y_1 = e^x$ و $y_2 = x$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

می‌باشند؛ و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید .

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$$

۳. ۶. حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بوسیلهٔ روش اپراتورها

با انتخاب علامت

$$D=\frac{d}{dx} \quad , \quad D^2=\frac{d^2}{dx^2} \quad ,\ldots, D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(n)}+b_1y^{(n-1)}+\cdots+b_ny=r(x) \qquad (۱)$$

به‌فرم زیر نوشته می‌شود :

$$(D^n+b_1D^{n-1}+\ldots+b_{n-1}D+b_n)y=r(x) \qquad (۲)$$

و معادلهٔ (۲) را بصورت $F(D)y=r(x)$ نمایش می‌دهیم که $F(D)$ یک چند جمله‌ای از D می‌باشد و به آن چند جمله‌ای اپراتوری می‌گوییم. $F(D)$ را می‌توان به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کرد.

$$F(D)=(D-a_1)(D-a_2)\ldots(D-a_n) \qquad (۳)$$

که در (۳)، "a_i"ها مقادیر ثابت حقیقی یا مختلط می‌باشند. درستی مطلب را برای مرتبه دوم نشان می‌دهیم. فرض کنید y تابع دلخواهی از x باشد که بتوان لااقل دو بار از آن مشتق گرفت.

$$\begin{aligned}(D-a_1)(D-a_2)y&=(D-a_1)(Dy-a_2y)\\&=D^2y-a_1Dy-a_2Dy+a_1a_2y\\&=(D^2-(a_1+a_2)D+a_1a_2)y \qquad (۴)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D-a_2)(D-a_1)y&=(D-a_2)(Dy-a_1y)\\&=D^2y-a_1Dy-a_2Dy+a_1a_2y\\&=(D^2-(a_1+a_2)D+a_1a_2)y \qquad (۵)\end{aligned}$$

از (۴) و (۵) داریم

$$D^2-(a_1+a_2)D+a_1a_2=(D-a_1)(D-a_2)=(D-a_2)(D-a_1)$$

تذکر ۱. اگر ضرایب ثابت نباشند، تعویضپذیری برقرار نخواهد بود. به مثال زیر توجه کنید!

مثال ۳. ۵۷.

$$\begin{aligned}(D-x)(D-2)y&=(D-x)(Dy-2y)\\&=D^2y-2Dy-xDy+2xy\\&=(D^2-(2+x)D+2x)y \qquad (۱)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D-2)(D-x)y&=(D-2)(Dy-xy)\\&=D^2y-Dxy-2Dy+2xy\\&=D^2y-Dy-xDy-2Dy+2xy\\&=(D^2-(2+x)D-1+2x)y \qquad (۲)\end{aligned}$$

با مقایسه (۱) و (۲)، داریم ،

$$(D-x)(D-2)\neq(D-2)(D-x).$$

اپراتورها دارای خواص ساده‌ای هستند که از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌شوند بعضی از خواص آنها در زیر بیان می‌شود.

فرض کنید $F_1(D)$ و $F_2(D)$ و $F_3(D)$ سه چندجمله‌ای اپراتوری باشند در این صورت ،

$$[F_1(D)+F_2(D)]y=F_1(D)y+F_2(D)y \qquad (۶)$$

$$[F_1(D)F_2(D)]y=F_1(D)[F_2(D)]y \qquad (۷)$$

$$[F_1(D)F_2(D)]y=[F_2(D)F_1(D)]y \qquad (۸)$$

$$F_1(D)[F_2(D)+F_3(D)]y=[F_1(D)F_2(D)+F_1(D)F_3(D)]y \qquad (۹)$$

$$F_1(D)[F_2(D)F_3(D)]y=[F_1(D)F_2(D)]F_3(D)y \qquad (۱۰)$$

$$[cF_1(D)]y=c[F_1(D)y] \qquad (۱۱)$$

$$[F_1(D)+c]y=F_1(D)y+cy\,. \qquad (۱۲)$$

پیدا کردن جواب عمومی معادلهٔ (۲)، می‌دانیم که جواب عمومی به‌فرم $y=y_h+y_p$ می‌باشد، y_p را با روش زیر بدست می‌آوریم، ابتدا $F(D)$ را به عوامل

اول تجزیه می‌کنیم ، داریم ،

$$(D-a_1)(D-a_2)\dots(D-a_n)y=r(x) \qquad (۱۳)$$

و فرض می‌کنیم

$$V_1=(D-a_2)(D-a_3)\dots(D-a_n)y \qquad (۱۴)$$

پس (۱۳) به‌فرم زیر درمی‌آید

$$(D-a_1)V_1=r(x)$$
$$V_1'-a_1V_1=r(x)$$

که یک معادله‌ٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد و

$$V_1=e^{a_1x}\int r(x)e^{-a_1x}\,dx \qquad (۱۵)$$

حال مقدار محاسبه شده V_1 از (۱۵) را در (۱۴) جایگذاری می‌کنیم و با فرض

$$V_2=(D-a_3)(D-a_4)\dots(D-a_n)y$$

داریم ،

$$(D-a_2)V_2=V_1$$
$$V_2'-a_2V_2=V_1 \qquad (۱۶)$$

که یک معادله‌ٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد و داریم .

$$V_2=e^{a_2x}\int V_1e^{-a_2x}\,dx \qquad (۱۷)$$

و بعد از $n-1$ مرتبه که از این روش استفاده کنیم ، داریم ،

$$(D-a_n)y=V_{n-1} \qquad (۱۸)$$

و

$$y_p=e^{a_nx}\int V_{n-1}e^{-a_nx}\,dx \qquad (۱۹)$$

تذکر ۲ . اگر ثابتهای انتگرالگیری را وارد کنیم یعنی $V_i=e^{a_ix}[\int V_{i-1}e^{-a_ix}dx+c_i]$ در این صورت جواب عمومی بدست می‌آید . ولی برای سادگی در محاسبات انتگرالها بهتر است ثابت انتگرال را وارد نکنیم و جواب خصوصی را بدست آورده، با جواب عمومی معادله همگن متناظر جمع کنیم .

مثال ۳ . ۵۸ . معادله دیفرانسیل

$$y''-3y'=\sin 2x$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم اپراتوری می‌نویسیم

$$D(D-3)y=\sin 2x \qquad (۱)$$
$$y_h=c_1+c_2e^{3x}$$

برای محاسبه y_p فرض می‌کنیم

$$(D-3)y=v_1 \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$DV_1=\sin 2x$$
$$V_1=-\frac{1}{2}\cos 2x \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) ، داریم

$$(D-3)y=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

و با توجه به فرمول (۱۹) ،

$$y_p=e^{3x}\int -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x\,dx$$
$$=e^{3x}\left[-\frac{1}{13}e^{-3x}\sin 2x+\frac{3}{26}e^{-3x}\cos 2x\right]$$
$$=\frac{3}{26}\cos 2x-\frac{1}{13}\sin 2x$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=c_1+c_2e^{3x}+\frac{3}{26}\cos 2x-\frac{1}{13}\sin 2x$$

مثال ۳ . ۵۹ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2-4D+3)y=1$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(D-1)(D-3)y=1 \qquad (۱)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$$

و برای محاسبه y_p ، فرض می‌کنیم

$$(D-3)y=V_1 \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم ،

$$(D-1)V_1=1$$

$$V_1=e^{x}\int e^{-x}\,dx=-1 \qquad (۳)$$

با توجه به مقدار (۳) ، داریم ،

$$(D-3)y=-1$$

$$y_p=e^{3x}\int -e^{-3x}\,dx=\frac{1}{3}$$

و

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{3}$$

مثال ۳ . ۶۰ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D-2)^2(D+1)y=x \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(D-2)(D-2)(D+1)y=x \qquad (۲)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{2x}$$

برای محاسبه y_p ، فرض می‌کنیم

$$(D-2)(D+1)y=V_1 \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) داریم ،

$$(D-2)V_1=x \qquad (۴)$$

$$V_1=e^{2x}\int xe^{-2x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \qquad (۵)$$

با جایگذاری (۵) در (۳) داریم ،

$$(D-2)(D+1)y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \qquad (۶)$$

و فرض می‌کنیم

$$(D+1)y=V_2 \qquad (۷)$$

با جایگذاری (۷) در (۶) داریم ،

$$(D-2)V_2=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

$$V_2=e^{2x}\int\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \qquad (۸)$$

با جایگذاری (۸) در (۷) داریم ،

$$(D+1)y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$y_p=e^{-x}\int\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)e^{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{2x}+\frac{1}{4}x$$

مثال ۳ . ۶۱ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2+4)y=e^{x} \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(D+2i)(D-2i)y = e^x \qquad (۲)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

برای محاسبه y_p ، فرض می‌کنیم

$$(D-2i)y = V_1 \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) داریم ،

$$(D+2i)V_1 = e^x$$

$$V_1 = e^{-2ix} \int e^{2ix} . e^x \, dx.$$

$$= \frac{1}{1+2i} e^{-2ix} . e^{2ix} . e^x$$

$$= \frac{e^x}{1+2i} \qquad (۴)$$

با جایگذاری (۴) در (۳) داریم ،

$$(D-2i)y = \frac{e^x}{1+2i}$$

$$y_p = e^{2ix} \int \frac{e^x}{1+2i} e^{-2ix} \, dx$$

$$= \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1}{1-2i} e^{2ix} . e^x . e^{-2ix}$$

$$= \frac{1}{5} e^x .$$

مثال ۳ . ۶۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2 - 3D + 2)y = \sin e^{-x} \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادله را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$(D-1)(D-2)y = \sin e^{-x} \qquad (۲)$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

برای محاسبه y_p ، فرض می‌کنیم

$$(D-2)y = V_1 \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۳) در (۲) ، داریم

$$(D-1)V_1 = \sin e^{-x}$$

$$V_1 = e^x \int e^{-x} \sin e^{-x} \, dx$$

$$= e^x \cos e^{-x} \qquad (۴)$$

با جایگذاری (۴) در (۳) داریم ،

$$(D-2)y = e^x \cos e^{-x}$$

$$y_p = e^{2x} \int e^{-x} \cos e^{-x} \, dx$$

$$= -e^{2x} \sin e^{-x}$$

و جواب عمومی معادله به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$$

مجموعه مسائل ۳ . ۶ .

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بنویسید .

۱ . $y'' - y' - 2y = e^x$

۲ . $y'' + 3y' + 2y = 12 e^x$

۳ . $y'' + 3y' + 2y = e^{ix}$

۴ . $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

۵ . $y'' + 3y' + 2y = \cos x$

۶ . $y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^x + 2\sin x$

۷. $y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x} + 9xe^{x}$

۸. $y'' - 3y' = 2e^{2x}\sin x$

۹. $y^{(4)} - 2y'' + y = x - \sin x$

۱۰. $y'' + y' = x^2 + 2x$

۱۱. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}$

۱۲. $y'' + 4y = 4x\sin 2x$

۱۳. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$

۱۴. $y''' - y' = e^{2x}\sin^2 x$

۱۵. $4y'' - 5y' = x^2 e^{-x}$

۱۶. $y''' - y'' + y' - y = 4e^{-3x} + 2x^4$

۱۷. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 3e^{2x}$

۳.۷. اپراتورهای معکوس

در این بخش دربارهٔ تعیین جواب خصوصی یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت ـ با استفاده از اپراتورهای معکوس بحث خواهیم کرد. قبل از معرفی اپراتور معکوس و بررسی این روش، قضایای زیر را ـ که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرد ـ بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۹. اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد، آنگاه برای هر ثابت a و هر

تابع دلخواه $u(x)$ که لااقل دارای n مشتق متوالی است، داریم

$$F(D)(e^{ax}u(x)) = e^{ax}F(D+a)u(x) \tag{۱}$$

اثبات. برای اثبات قضیه کافیست نشان دهیم

$$D^k(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^k u$$

با استفاده از روش استقرار، ابتدا برای $k=0$ و $k=1$ قضیه را ثابت می‌کنیم.

$$D^0(e^{ax}u) = e^{ax}u = e^{ax}(D+a)^0 u$$

$$D(e^{ax}u) = a e^{ax}u + e^{ax}Du = e^{ax}(D+a)u$$

حال با فرض اینکه برای $k=m$ درست باشد و ثابت می‌کنیم برای $k=m+1$ نیز درست است یعنی فرض می‌کنیم

$$D^m(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^m u$$

با مشتقگیری از رابطهٔ بالا داریم

$$\begin{aligned} D^{m+1}(e^{ax}u) &= D[D^m(e^{ax}u)] \\ &= D[e^{ax}(D+a)^m u] \\ &= a e^{ax}(D+a)^m u + e^{ax}D(D+a)^m u \\ &= e^{ax}[a(D+a)^m + D(D+a)^m]u \\ &= e^{ax}(D+a)^{m+1}u. \end{aligned}$$

نتیجه ۱. اگر $F(D) = (D-a)^n$ باشد، آنگاه

$$(D-a)^n(e^{ax}u) = e^{ax}D^n u \tag{۲}$$

قضیه ۳.۱۰. اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای اپراتوری باشد، آنگاه

$$F(D)(ce^{ax}) = ce^{ax}F(a) \tag{۳}$$

a و c مقادیر ثابت هستند.

اثبات. کافیست نشان دهیم که

$$(D+a)^k c = ca^k \tag{۴}$$

(۴) بسادگی بوسیله بسط دو جمله‌ای $(D+a)^k$ اثبات می‌شود*. و با توجه به (۴) داریم

$$F(D+a)c = [(D+a)^n + a_1(D+a)^{n-1} + \dots + a_n]c$$
$$= c(a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_n)$$
$$= cF(a)$$

حال طبق قضیه ۳ . ۹ . ، با فرض $u(x) = c$

$$F(D)(e^{ax}c) = e^{ax}F(D+a)c$$
$$= ce^{ax}F(a)$$

بدون آنکه بخواهیم از مطلب اصلی دور شویم ، چند مثال دربارهٔ کاربردهای عملی قضایای فوق را بیان می‌کنیم :

مثال ۳ . ۶۳ . $(D^2+2D-3)(4e^{2x})$ را تعیین کنید .

حل . با توجه به قضیه ۳ . ۱۰ . داریم

$$(D^2+2D-3)(4e^{2x}) = 4e^{2x}(4+4-3)$$
$$= 20e^{2x}$$

مثال ۳ . ۶۴ . $(D^2+3D-1)(x^2e^x)$ را تعیین کنید .

حل . با توجه به قضیه ۳ . ۹ داریم

$$(D^2+3D-1)(e^xx^2) = e^x[(D+1)^2+3(D+1)-1]x^2$$
$$= e^x(D^2+5D+3)x^2$$
$$= e^x(2+10x+3x^2)$$

مثال ۳ . ۶۵ . $(D+3)^2(e^{-3x}\cot x)$ را تعیین کنید .

با توجه به نتیجه ۱ . داریم

$$(D+3)^2(e^{-3x}\cot x) = e^{-3x}D^2\cot x$$
$$= 2e^{-3x}\csc^2 x\cot x.$$

* برای $k=2$ اثبات می‌کنیم

$$(D+a)^2c = (D^2+2aD+a^2)c$$

و چون مشتقات c برابر صفر هستند پس:

$$(D+a)^2c = ca^2$$

چون مشتقگیری و انتگرالگیری دو عمل عکس یکدیگرند و چون نماد مشتقگیری را با D نشان دادیم ، بدین جهت نماد انتگرالیگری را با D^{-1} یا $\frac{1}{D}$ نمایش می‌دهیم و داریم ،

$$D^{-1}(Du) = D(D^{-1}u) = u$$

و تعریف می‌کنیم $D^{-2}u$ یعنی $D^{-1}(D^{-1}u)$ و بهمین ترتیب مقصود از $D^{-k}u$ یا $\frac{1}{D^k}u$ یعنی k بار انتگرال متوالی از u گرفتن باشد و $D^k(D^{-k}u) = D^{-k}(D^ku)$

مثال ۳ . ۶۶ . $y = D^{-2}(2x)$ را تعیین کنید .

حل .

$$y = D^{-1}[D^{-1}(2x)] = D^{-1}[x^2+c_1] = \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2$$

تعریف ۳ . ۸ . اپراتور معکوس $\frac{1}{F(D)}$ یا $F^{-1}(D)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}u\right] = u \qquad (۵)$$

$$\frac{1}{F(D)}[F(D)u] = u \qquad (۶)$$

قضیه ۳ . ۱۱ . برای هر مقدار ثابت c داریم

$$\frac{1}{F(D)}cu(x) = c\frac{1}{F(D)}u(x) \qquad (۷)$$

اثبات . برای اثبات اپراتور $F(D)$ را در دو طرف رابطه (۷) اثر داده و نشان می‌دهیم نتایج یکسان دارد .

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}cu(x)\right] = cu(x)$$
$$F(D)\left[c\frac{1}{F(D)}u(x)\right] = cF(D)\left[\frac{1}{F(D)}u(x)\right]$$
$$= cu(x)$$

قضیه ۳ . ۱۲ . فرض کنید $F(D)$ یک چندجمله‌ای پراتوری و a ثابت و $u(x)$ تابع دلخواهی از x باشد . آنگاه

$$\frac{1}{F(D)}(e^{ax}u(x)) = e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}u(x) \qquad (۸)$$

اثبات . اپراتور $F(D)$ را در دو طرف رابطه (۸) اثر داده و نشان می‌دهیم نتایج یکسان دارد .

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}(e^{ax}u)\right]=e^{ax}u$$

$$F(D)\left[e^{ax}\left(\frac{1}{F(D+a)}u\right)\right]=e^{ax}F(D+a)\left[\frac{1}{F(D+a)}u\right]$$
$$=e^{ax}u.$$

نتیجه ۲ . اگر $F(D)=(D-a)^n$ باشد ، آنگاه

(۹)
$$\frac{1}{(D-a)^n}(e^{ax}u)=e^{ax}\frac{1}{D^n}u.$$

و روابط بسیار مهم زیر را داریم

(۱۰)
$$\frac{1}{F(D)}e^{ax}=\frac{1}{F(a)}e^{ax},\quad F(a)\neq 0$$

(۱۱)
$$\frac{1}{F(D)}c=\frac{c}{F(0)},\quad F(0)\neq 0$$

(۱۲)
$$\frac{1}{(D-a)^kP(D)}ce^{ax}=\frac{cx^k e^{ax}}{k!\,P(a)},\quad P(a)\neq 0$$

رابطهٔ (۱۲) را اثبات می‌کنیم . فرض کنید ،

$$F(D)=(D-a)^kP(D)$$

حال با توجه به قضیه ۳ . ۱۲ و با انتخاب $u(x)=c$ داریم ،

$$\frac{1}{(D-a)^kP(D)}ce^{ax}=e^{ax}\frac{1}{D^kP(D+a)}c$$
$$=e^{ax}\frac{1}{D^k}\cdot\frac{1}{P(D+a)}c$$

و با توجه به رابطهٔ (۱۱) داریم ،

$$=e^{ax}\frac{1}{D^k}\cdot\frac{c}{P(a)}$$

$$=e^{ax}\frac{c}{P(a)}\cdot\frac{x^k}{k!}$$

توجه ۱ . تاکنون ثابت کرده‌ایم که جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به‌فرم

$$F(D)y=ce^{ax}$$

آ) اگر a ریشه معادلهٔ مفسر نباشد یعنی $F(a)\neq 0$ باشد . به‌صورت زیر است .

(۱۳)
$$y_p=c\frac{e^{ax}}{F(a)}$$

ب) اگر a ، k بار ریشه معادلهٔ مفسر باشد یعنی $F(D)=(D-a)^kP(D)$ و $P(a)\neq 0$ جواب خصوصی به‌فرم زیر است :

(۱۴)
$$y_p=c\frac{e^{ax}x^k}{k!P(a)}$$

مثال ۳ . ۶۷ . جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2+D+1)y=e^{3x}+6e^x-3e^{-2x}+5$$

را بنویسید .

حل .

$$y_p=\frac{1}{(D^2+D+1)}e^{3x}+6\frac{1}{(D^2+D+1)}e^x-3\frac{1}{(D^2+D+1)}e^{-2x}+\frac{1}{(D^2+D+1)}5$$
$$=\frac{1}{13}e^{3x}+2e^x-e^{-2x}+5$$

مثال ۳ . ۶۸ . جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^2-1)y=e^x$$

را بنویسید .

حل . چون $F(1)=(1-1)=0$ می‌باشد . لذا "۱" ریشه معادلهٔ مفسر است .

$$D^2-1=(D-1)(D+1)$$

در این مثال $k=1$ و $P(D)=D+1$ می‌باشد .

$$y_p=\frac{1}{(D-1)(D+1)}e^x$$

و با توجه به فرمول (۱۴)، داریم

$$y_p = \frac{x e^x}{1!(1+1)} = \frac{1}{2} x e^x$$

مثال ۳ . ۶۹. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4) y = e^{2x} - 2$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{D^3-D^2-4D+4} e^{2x} - \frac{1}{D^3-D^2-4D+4} 2$$

(مطابق فرمول ۱۱)

$$\frac{1}{D^3-D^2-4D+4}2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

و چون "۲"، یک بار ریشه معادلهٔ مفسر می‌باشد،

$$D^3-D^2-4D+4 = (D-2)(D^2+D-2)$$

پس $k=1$ و $P(D)=D^2+D-2$، لذا با توجه به فرمول (۱۴)

$$\frac{1}{(D-2)(D^2+D-2)} e^{2x} = \frac{e^{2x} x}{1!(4)} = \frac{x e^{2x}}{4}$$

و

$$y_p = \frac{x e^{2x}}{4} - \frac{1}{2}$$

مثال ۳ . ۷۰. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D-1)^2(D+1)^3 y = 2e^x + 4e^{-x}$$

را بنویسید

حل.

$$y_p = 2\frac{1}{(D-1)^2(D+1)^3}e^x + 4\frac{1}{(D-1)^2(D+1)^3}e^{-x}$$

$$= 2\frac{x^2 e^x}{2!(1+1)^3} + 4\frac{x^3 e^{-x}}{3!(-1-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 e^x}{8} + \frac{x^3 e^{-x}}{6}.$$

اگر در معادلهٔ دیفرانسیل $F(D)y = r(x)$، طرف دوم یعنی $r(x)$ به‌فرم یک چند‌جمله‌ای از درجه m باشد. در این صورت می‌دانیم $y_p = \frac{1}{F(D)} r(x)$ می‌باشد. برای تعیین y_p ابتدا، "۱" را بر $F(D)$ تقسیم می‌کنیم و تا جمله D^m عمل تقسیم را ادامه می‌دهیم؛ زیرا به‌ازاء هر $k > m$ داریم، $D^k x^m = 0$ است.

مثال ۳ . ۷۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^3 - 2D + 4)y = x^2 - 2x + 1$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{D^3-2D+4}(x^2-2x+1)$$

ابتدا، "۱" را بر D^3-2D+4 تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} 1 & 4-2D+D^3 \\ \cline{2-2} & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}D^2 \\ -\underline{1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}D^3} & \\ \quad \frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^3 & \\ -\underline{\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2+\frac{1}{8}D^3} & \\ \quad \frac{1}{4}D^2-\frac{3}{8}D^3 & \\ \quad \frac{1}{4}D^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

و چون بزرگترین درجه چندجمله‌ای ۲ می‌باشد، عمل تقسیم را تا جمله D^2 ادامه می‌دهیم،

$$y_p = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}D^2\right)(x^2-2x+1)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - 2 + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{13}{8}$$

تذکر. در مثال بالا صفر ریشه معادلهٔ مفسر نبود یعنی $F(0) \neq 0$ حال اگر صفر ریشه معادلهٔ مفسر باشد یعنی $F(D) = D^r P(D)$ و $P(0) \neq 0$ باشد، روش حل به‌شرح مثال زیر خواهد بود:

مثال ۳. ۷۲. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x^2 - 1$$

را بنویسید.

حل. چون صفر، دو بار ریشه معادلهٔ مفسر است پس

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2) = D^2(D^2 + 2D - 3),$$

و

$$y_p = \frac{1}{D^2}\left[\frac{1}{D^2 + 2D - 3}(x^2 - 1)\right]$$

ابتدا، عبارت داخل کروشه را حساب می‌کنیم و سپس دو بار از آن انتگرال می‌گیریم

$$\begin{array}{l|l}
1 & -3 + 2D + D^2 \\ \cline{2-2}
-\left(1 - \frac{2}{3}D - \frac{1}{3}D^2\right) & -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \frac{7}{27}D^2 \\ \cline{1-1}
\frac{2}{3}D + \frac{1}{3}D^2 & \\
\frac{2}{3}D - \frac{4}{9}D^2 - \frac{2}{9}D^3 & \\ \cline{1-1}
\frac{7}{9}D^2 + \frac{2}{9}D^3 & \\
\frac{7}{9}D^2 \ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2}\left[\left(-\frac{1}{27}\right)(9 + 6D + 7D^2)(x^2 - 1)\right]$$

$$= -\frac{1}{27}\frac{1}{D^2}(9x^2 + 12x + 5)$$

$$= -\frac{1}{27}\frac{1}{D}(3x^3 + 6x^2 + 5x)$$

$$= -\frac{1}{27}\left(\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2\right)$$

قضیه ۳. ۱۳. اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد و فقط شامل توانهای زوج D؛ آنگاه.

(۱۵) $$F(D^2)\sin ax = F(-a^2)\sin ax$$

(۱۶) $$F(D^2)\cos ax = F(-a^2)\cos ax$$

اثبات. رابطه (۱۵) را اثبات می‌کنیم. و اثبات (۱۶) مشابه (۱۵) می‌باشد.

$$\begin{aligned}
F(D^2)\sin ax &= (D^{2k} + a_1 D^{2k-2} + \cdots + a_n)\sin ax \\
&= ((-a^2)^k + a_1(-a^2)^{2k-2} + \cdots + a_n)\sin ax \\
&= F(-a^2)\sin ax
\end{aligned}$$

و $2k = n$.

قضیه ۳. ۱۴. اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد و فقط شامل توانهای زوج D آنگاه،

(۱۷) $$\frac{1}{F(D^2)}\sin ax = \frac{1}{F(-a^2)}\sin ax \quad , \quad F(-a^2) \neq 0$$

(۱۸) $$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax = \frac{1}{F(-a^2)}\cos ax \quad , \quad F(-a^2) \neq 0$$

اثبات. (۱۸) را ثابت می‌کنیم و اثبات (۱۷) مشابه می‌باشد. برای اثبات کافیست اپراتور $F(D^2)$ را به دو طرف اثر داده و نشان می‌دهیم نتایج یکسان دارد.

$$F(D^2)\left[\frac{1}{F(D^2)}\cos ax\right] = \cos ax$$

$$\begin{aligned}
F(D^2)\left[\frac{1}{F(-a^2)}\cos ax\right] &= \frac{1}{F(-a^2)}F(D^2)\cos ax \\
&= \frac{1}{F(-a^2)}F(-a^2)\cos ax \\
&= \cos ax
\end{aligned}$$

توجه ۲. اگر معادله‌ٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به‌صورت

$$F(D^2)y = C\cos ax$$

یا

$$F(D^2)y = C\sin ax$$

باشد و ia ریشه معادله مفسر نباشد (یعنی $F(-a^2)\neq 0$ باشد) در این صورت جواب خصوصی را به‌فرم زیر خواهیم داشت.

$$y_p = \frac{c}{F(-a^2)}\cos ax \qquad (۱۹)$$

$$y_p = \frac{c}{F(-a^2)}\sin ax \qquad (۲۰)$$

مثال ۳.۷۳. جواب خصوصی معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$(D^2-2)y = \cos 2x$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{1}{D^2-2}\cos 2x$$

با توجه به فرمول (۱۹) داریم

$$y_p = \frac{-1}{6}\cos 2x$$

مثال ۳.۷۴. جواب خصوصی معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$(D^4+2D^2-1)y = 2\sin x$$

را بنویسید.

حل.

$$y_p = \frac{2}{D^4+2D^2-1}\sin x$$

$$= \frac{2}{1-2-1}\sin x = -\sin x$$

توجه ۳. اگر در معادله‌ٔ دیفرانسیل به‌فرم زیر

$$F(D)y = C\cos ax \quad , \quad F(D)y = C\sin ax \qquad (۲۱)$$

ia ریشه معادله‌ٔ مفسر بوده یا $F(D)$ شامل توانهای فرد D هم باشد، در این صورت از فرمول "اولر" استفاده می‌کنیم،

$$e^{iQ} = \cos Q + i\sin Q \qquad (۲۲)$$

به‌جای $\sin ax$ یا $\cos ax$ مقدار e^{iax} را قرار می‌دهیم تا معادله به‌فرم

$$F(D)y = c\,e^{iax}$$

درآید؛ سپس با استفاده از فرمولهای (۱۳) یا (۱۴) جواب خصوصی را پیدا می‌کنیم که این جواب خصوصی به‌صورت مختلط بیان می‌شود. حال اگر طرف دوم معادله، $\cos ax$ باشد، قسمت حقیقی، و اگر طرف دوم معادله، $\sin ax$ باشد، قسمت موهومی، جواب مطلوب می‌باشد.

مثال ۳.۷۵. جواب خصوصی معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$(D^2+4)y = \sin 2x \qquad (۱)$$

را بنویسید.

حل. چون $+2i$ ریشه معادله‌ٔ مفسر می‌باشد ($-4+4=0$) در این صورت با استفاده از فرمول

$$e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$$

به‌جای معادله‌ٔ (۱)، معادله‌ٔ زیر را حل کرده،

$$(D^2+4)y = e^{2ix} \qquad (۲)$$

و قسمت موهومی جواب خصوصی (۲) را به‌عنوان جواب خصوصی (۱) اختیار می‌کنیم:

$$y_p = \frac{1}{(D+2i)(D-2i)}e^{2ix},$$

و با توجه به فرمول (۱۴)، $k=1$ ، $P(D)=D+2i$

$$y_p = \frac{x\,e^{2ix}}{4i}$$

$$= \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{i}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= \frac{x}{4}(\sin 2x - i\cos 2x)$$

پس، جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y_p = -\frac{x}{4}\cos 2x$$

مثال ۳ . ۷۶ . جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$(D^3 + 1)y = \cos x \qquad (۱)$$

را بنویسید .

حل . چون $F(D)$ شامل توانهای فرد D می‌باشد ، لذا با توجه به فرمول (۲۱) ، به‌جای معادلهٔ (۱) ، معادلهٔ زیر را حل کرده ،

$$(D^3 + 1)y = e^{ix} \qquad (۲)$$

و قسمت حقیقی جواب خصوصی (۲) را به‌عنوان جواب خصوصی (۱) ، اختیار می‌کنیم ؛

$$y_p = \frac{1}{D^3+1}e^{ix}$$
$$= \frac{1}{1-i}e^{ix}$$
$$= \frac{1+i}{2}(\cos x + i\sin x)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{i}{2}(\cos x + \sin x)$$

پس، جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌فرم زیر است :

$$y_p = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$

توجه ۴ . اگر در معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم (۲۱) ، $F(D)$ شامل توانهای فرد D باشد می‌توان $F(D)$ را به‌فرم زیر بیان کرد :

$$F(D) = F_1(D^2) + D\,F_2(D^2) \qquad (۲۳)$$

و جواب خصوصی معادله را از روش زیر بدست آورد

$$y_p = \frac{1}{F_1(D^2) + D\,F_2(D^2)}\cos ax$$

$$= \frac{1}{F_1(-a^2) + D\,F_2(-a^2)}\cos ax$$
$$= \frac{1}{A + DB}\cos ax$$
$$= \frac{A - DB}{A^2 + a^2B^2}\cos ax$$

مثال ۳ . ۷۷ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2 + 2D - 2)y = \sin x$$

را بنویسید

حل .

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 2}\sin x$$
$$= \frac{1}{-3 + 2D}\sin x$$
$$= \frac{-3 - 2D}{9 + 4}\sin x$$
$$= -\frac{1}{13}(3\sin x + 2\cos x)$$

مثال ۳ . ۷۸ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2 + 4D + 5)y = 10e^{-2x}\cos x \qquad (۱)$$

را بنویسید .

حل .

$$y_p = 10\frac{1}{D^2 + 4D + 5}e^{-2x}\cos x$$

با توجه به قضیهٔ ۳ . ۱۲ ، داریم

$$y_p = 10e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^2 + 4(D-2) + 5}\cos x$$
$$= 10e^{-2x}\frac{1}{D^2 + 1}\cos x \qquad (۲)$$

برای محاسبه $\frac{1}{D^2+1}\cos x$ ، با توجه به فرمول (۲۲) ، $\frac{1}{D^2+1}e^{ix}$ را حساب کرده و قسمت حقیقی را به‌عنوان جواب انتخاب می‌کنیم .

$$\frac{1}{(D+i)(D-i)}\, e^{ix} = \frac{x\,e^{ix}}{2i}$$
$$= \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{i}\,(\cos x + i\sin x)$$
$$= \frac{x}{2}\sin x - i\,\frac{x}{2}\cos x$$

و

$$\frac{1}{D^2+1}\cos x = \frac{x}{2}\sin x \qquad (۳)$$

و با جایگذاری (۳) در (۲) داریم :

$$y_p = 5\,x\,e^{-2x}\sin x$$

قضیه ۳ . ۱۵ . اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد و $u(x)$ تابع دلخواهی از x ، آنگاه ،

$$\frac{1}{F(D)}\,x\,u = x\,\frac{1}{F(D)}\,u - \frac{F'(D)}{(F(D))^2}\,u \qquad (۲۴)$$

اثبات . تمرین شماره ۱۸ .

مثال ۳ . ۷۹ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2+9)\,y = x\cos x$$

را بنویسید .

حل .

$$y_p = \frac{1}{(D^2+9)}\,x\cos x$$

با توجه به فرمول (۲۴) داریم :

$$y_p = x\,\frac{1}{D^2+9}\cos x - \frac{2D}{(D^2+9)^2}\cos x$$
$$= \frac{x}{8}\cos x + \frac{1}{32}\sin x$$

مثال ۳ . ۸۰ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2+4)\,y = x^2\sin x$$

را بنویسید .

حل .

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\,x^2\sin x$$
$$= x\,\frac{1}{D^2+4}\,x\sin x - \frac{2D}{(D^2+4)^2}\,x\sin x$$
$$= x\left[x\,\frac{1}{D^2+4}\sin x - \frac{2D}{(D^2+4)^2}\sin x\right] - 2D\left[x\,\frac{1}{(D^2+4)^2}\sin x - \frac{4D(D^2+4)}{(D^2+4)^4}\sin x\right]$$
$$= x\left[\frac{x}{3}\sin x - \frac{2}{9}\cos x\right] - 2D\left(\frac{x}{9}\sin x\right) + \frac{8D^2}{(D^2+4)^3}\sin x$$
$$= \frac{x^2}{3}\sin x - \frac{2}{9}\,x\cos x - \frac{2}{9}\sin x - \frac{2}{9}\,x\cos x - \frac{8}{27}\sin x$$
$$= \frac{x^2}{3}\sin x - \frac{4}{9}\,x\cos x - \frac{14}{27}\sin x$$

مثال ۳ . ۸۱ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^2+2D+3)\,y = x\,e^{2x}\cos x$$

را بنویسید .

حل .

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+3}\,x\,e^{2x}\cos x$$
$$= e^{2x}\,\frac{1}{(D+2)^2+2(D+2)+3}\,x\cos x$$
$$= e^{2x}\left[x\,\frac{1}{D^2+6D+11}\cos x - \frac{2D+6}{(D^2+6D+11)^2}\cos x\right]$$
$$= e^{2x}\left\{\left[x\,\frac{1}{10+6D}\cos x\right] - 2(D+3)\left[\frac{1}{64+120D}\cos x\right]\right\}$$

$$= e^{2x} \{ [x \frac{10-6D}{136} \cos x] - \frac{2}{8} (D+3) (\frac{8-15D}{289} \cos x) \}$$

$$= e^{2x} [(\frac{10}{136} x - \frac{39}{1156}) \cos x + (\frac{6}{136} x - \frac{37}{1156}) \sin x]$$

مجموعه مسائل ۳ . ۷

با استفاده از روش اپراتورهای معکوس، جواب خصوصی معادلات زیر را تعیین کنید .

۱ . $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$

۲ . $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$

۳ . $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

۴ . $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

۵ . $y'' + y' + y = (x + x^2) e^x$

۶ . $y'' - y = \cosh x$

۷ . $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

۸ . $y'' + y = 4x \cos x$

۹ . $y'' + 4y = \cos^2 x$

۱۰ . $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$

۱۱ . $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$

۱۲ . $y'' - y = 4xe^x$

۱۳ . $y'' - y = e^x \sin 2x$

۱۴ . $y'' + y = -2 \sin x + 4x \cos x$

۱۵ . $y'' + y = x^2 \sin x$

۱۶ . $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$

۱۷ . $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2} \cos x$

۱۸ . قضیه ۳ . ۱۵ . را اثبات کنید .

۳ . ۸ . روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم در حالات خاص

در این بخش، در مورد حل معادلات مرتبهٔ دوم که به‌فرم خطی با ضرایب ثابت بیان نمی‌شوند بحث می‌کنیم . یادآور می‌شویم که در حالت کلی قادر به حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم نیستیم و فقط حالات خاصی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و درصورت امکان، در هر حالت بحث را به‌مراتب بالاتر تعمیم خواهیم داد .

الف) $$F (x , y'') = 0 \qquad (1)$$

اگر y'' بطور صریح برحسب x بیان شده یعنی $y'' = f (x)$ ، در این صورت با دو بار انتگرالگیری جواب عمومی بدست می‌آید و چنانچه قادر نباشیم y'' را بطور صریح برحسب x بیان کنیم ، از طریق حل "ب" استفاده خواهیم کرد .

مثال ۳ . ۸۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' = 2x$$

را حل کنید .

حل .

$$y' = x^2 + c_1$$

$$y = \frac{1}{3} x^3 + c_1 x + c_2 .$$

تذکر ۱. برای حل معادلهٔ دیفرانسیل $y^{(n)}=f(x)$ کافی است n بار انتگرال بگیریم و جواب عمومی به‌فرم

$$y=\int\dots\int f(x)\,dx\dots dx+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\dots+c_{n-1}x+c_n \tag{۲}$$

خواهد بود.

مثال ۳.۸۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(4)}=\sin x$$

را حل کنید.

حل. کافی است چهار بار انتگرال بگیریم، داریم:

$$y=\sin x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

ب) معادلهٔ دیفرانسیل فاقد تابع $F(x,y',y'')=0$ (۳)

با فرض $y'=p$ معادله تبدیل به یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌شود زیرا،

$$y'=p\,,\ y''=\frac{dp}{dx}=p' \tag{۴}$$

با جایگذاری (۴) در (۳) داریم

$$F(x,p,p')=0 \tag{۵}$$

که (۵) یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌باشد که پس از حل (۵)، ابتدا p را بدست می‌آوریم

$$p=f(x,c_1) \tag{۶}$$

و با انتگرالگیری از (۶)، جواب عمومی بدست می‌آید.

مثال ۳.۸۴. معادله دیفرانسیل

$$xy''+y'=1\,,\ x>0 \tag{۱}$$

را حل کنید.

حل. معادله فاقد تابع می‌باشد، و با انتخاب

$$y'=p\,,\ y''=p' \tag{۲}$$

معادله (۱) به یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود.

$$xp'+p=1 \tag{۳}$$

معادلهٔ (۳)، از نوع خطی مرتبهٔ اول می‌باشد و

$$p=\frac{1}{x}\left[\int\frac{1}{x}\,x\,dx+c_1\right]$$

$$=1+\frac{c_1}{x}$$

$$y'=1+\frac{c_1}{x}$$

که با انتگرالگیری، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) بدست می‌آید.

$$y=x+c_1Lnx+c_2$$

مثال ۳.۸۵. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+x(y')^2=0 \tag{۱}$$

را حل کنید.

حل. معادله فاقد تابع می‌باشد، با انتخاب

$$y'=p\,,\ y''=p'$$

معادلهٔ (۱)، تبدیل به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌شود.

$$p'+xp^2=0$$

$$\frac{dp}{p^2}+x\,dx=0 \tag{۲}$$

معادله (۲) از نوع متغیرها از هم جدا می‌باشد.

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}x^2=c$$

$$p=\frac{2}{x^2-c_1^2}$$

$$y'=\frac{2}{x^2-c_1^2} \tag{۳}$$

و با انتگرالگیری از (۳)، جواب عمومی معادله (۱) به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$y=\frac{1}{c_1}\ Ln\,\frac{x-c_1}{x+c_1}+c_2 \ , \quad e_1\neq 0$$

تذکر ۲. اگر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه n، فاقد تابع باشد،

(۷) $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$

با انتخاب

$$y'=p \ , \ y''=p', \ldots, y^{(n)}=p^{(n-1)}$$

تبدیل به معادلهٔ مرتبهٔ $(n-1)$ می‌شود.

(۸) $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)})=0$

و اگر معادله دیفرانسیل مرتبه n، فاقد تابع و مشتق تا مرتبه $m-1$ باشد،

(۹) $F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n)})=0$

با انتخاب

$$y^{(m)}=p \ , \ y^{(m+1)}=p' \ , \ldots, y^{(n)}=p^{(n-m)}$$

معادلهٔ (۹) تبدیل به معادلهٔ مرتبه $n-m$ می‌شود.

(۱۰) $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-m)})=0$

مثال ۳.۸۶. معادله دیفرانسیل

$x\,y^{(5)}-y^{(4)}=0$ (۱)

را حل کنید.

حل. با فرض

$$y^{(4)}=p \ , \ y^{(5)}=\frac{dp}{dx}$$

معادلهٔ (۱) تبدیل به معادلهٔ مرتبهٔ یک از نوع متغیرها از هم جدا می‌شود.

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{x}\,p$$
$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$
$$Ln\,p=Ln\,x+Ln\,c \Rightarrow p=cx$$
$$y^{(4)}=cx$$

و با چهار بار انتگرالگیری متوالی داریم:

$$y=c_1x^5+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5$$

مثال ۳.۸۷. معادله دیفرانسیل

$x\,y'''+y''=x+1$ (۱)

را حل کنید.

$$y''=p \ , \ y'''=p'$$

$x\,p'+p=x+1 \Rightarrow p'+\frac{1}{x}\,p=\frac{x+1}{x}$ (۲)

معادلهٔ دیفرانسیل (۲)، خطی مرتبهٔ اول می‌باشد و

$$p=\frac{1}{x}\left[\int(x+1)\,dx+c_1\right]$$

$=\frac{x}{2}+1+\frac{c_1}{x}$ (۳)

و چون $y''=p$، کافی است دو بار از (۳) انتگرال بگیریم.

$$y'=\int\left(\frac{x}{2}+1+\frac{c_1}{x}\right)dx+c_2'$$
$$=\frac{x^2}{4}+x+c_1Ln\,x+c_2'$$
$$y=\int\left(\frac{x^2}{4}+x+c_1Ln\,x+c_2'\right)dx+c_3$$
$$=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+c_1x\,Ln\,x+c_2x+c_3$$

پ) معادلهٔ دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل

(۱۱) $F(y, y', y'')=0$

با انتخاب $y'=p$ و p به‌عنوان تابعی از y، داریم

(۱۲) $y'=p \ , \ y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx}=p\,\frac{dp}{dy}$

با جایگذاری (۱۲) در (۱۱) داریم،

(۱۳) $F\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right)=0$

که (۱۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌باشد .

تذکر ۳. این روش درمورد مراتب بالاتر هم صادق است .

مثال ۳ . ۸۸. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y y'' + (y+1) y'^2 = 0 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل. با جایگذاری $y'' = p\frac{dp}{dy}$ ، $y' = p$ در (۱) داریم :

$$y p \frac{dp}{dy} + (y+1) p^2 = 0$$

$$p\left(\frac{dp}{p} + \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy\right) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$$

$$\frac{dp}{p} + \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = 0 \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲)، مرتبهٔ اول از نوع متغیرها از هم جدا می‌باشد و با انتگرالگیری داریم ،

$$Ln\, p + Ln\, y = c - y$$

$$p y = c_1 e^{-y}$$

$$y \frac{dy}{dx} = c_1 e^{-y}$$

$$y e^{y} dy = c_1 dx$$

$$\int y e^{y} dy = \int c_1 dx + c_2$$

$$e^{y}(y-1) = c_1 x + c_2$$

مثال ۳ . ۸۹. منحنی $y(x)$ را طوری پیدا کنید که $y'' = 12\sqrt{y}$ و در مبداء مماس بر محور x ها باشد .

حل. ابتدا باید معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = 12\sqrt{y}$ را حل کرد . برای حل فرض می‌کنیم ،

$$y' = p \;,\; y'' = p\frac{dp}{dy}$$

پس معادله به‌فرم زیر درمی‌آید که یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول از نوع متغیرها از هم جدا می‌باشد ،

$$p\frac{dp}{dy} = 12 y^{1/2}$$

$$\int p\, dp = 12 \int y^{1/2} dy$$

$$\frac{1}{2} p^2 = 8 y^{3/2} + c$$

$$y'^2 = 16 y^{3/2} + c$$

چون منحنی در نقطه $(0,0)$ بر محور "x"ها مماس است پس،

$$0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$y' = 4 y^{3/4}$$

$$y^{-3/4} dy = 4\, dx$$

$$4 y^{1/4} = 4x + c_1$$

منحنی از نقطه $(0,0)$ عبور می‌کند .

$$0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

و جواب مطلوب

$$y = x^4$$

مثال ۳ . ۹۰. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - (y')^2 + y y'^3 = 0 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل. معادله فاقد متغیر می‌باشد و با انتخاب

$$y' = p \;,\; y'' = p\frac{dp}{dy} \qquad (2)$$

معادلهٔ (۱) به یک معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود .

$$p\frac{dp}{dy} - p^2 + y p^3 = 0$$

$$p\left(\frac{dp}{dy} - p + yp^2\right) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$$

$$\frac{dp}{dy} - p = -yp^2 \qquad (۳)$$

معادله (۳)، برنولی می‌باشد، با تقسیم طرفین (۳) بر p^2 داریم،

$$p^{-2}\frac{dp}{dy} - p^{-1} = -y \qquad (۴)$$

$$u = p^{-1}\ ,\ \frac{du}{dy} = -p^{-2}\frac{dp}{dy} \qquad (۵)$$

با جایگذاری (۵) در (۴) داریم

$$\frac{du}{dy} + u = y \qquad (۶)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۶)، از نوع خطی مرتبهٔ اول است

$$u = \frac{1}{p} = e^{-y}\left[\int y e^{y} dy + c_1\right]$$

$$= y - 1 + c_1 e^{-y}$$

و

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y - 1 + c_1 e^{-y}}$$

$$(y - 1 + c_1 e^{-y})\,dy = dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 - y - c_1 e^{-y} = x + c_2 .$$

مثال ۳.۹۱. معادلهٔ دیفرانسیل

$$2y'' - y'^2 + 4 = 0$$

را حل کنید.

حل. این معادله، هم فاقد تابع و هم فاقد متغیر می‌باشد. در چنین حالتی بهتر است

از روش فاقد تابع استفاده شود. با انتخاب $y' = p$ و $y'' = p'$ داریم،

$$2p' - p^2 + 4 = 0$$

$$\frac{2\,dp}{p^2 - 4} = dx$$

$$\frac{1}{2} Ln\frac{p-2}{p+2} = x + c$$

$$\frac{p-2}{p+2} = c_1 e^{2x}$$

$$p = \frac{2(1 + c_1 e^{2x})}{1 - c_1 e^{2x}}$$

$$= 2\left(1 + \frac{2c_1 e^{2x}}{1 - c_1 e^{2x}}\right)$$

$$dy = 2\left(1 + \frac{2c_1 e^{2x}}{1 - c_1 e^{2x}}\right)dx$$

$$y = 2x - 2\,Ln(1 - c_1 e^{2x}) + c_2$$

ت) اگر معادلهٔ

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (۱۴)$$

نسبت به y و y' و y'' همگن باشد، یعنی داشته باشیم

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n F(x, y, y', y'')$$

با انتخاب

$$y = e^{\int z\,dx} \qquad (۱۵)$$

(۱۴) تبدیل به معادلهٔ مرتبهٔ اول می‌شود. (z تابعی مجهول از x می‌باشد.)*

مثال ۳.۹۲. معادله دیفرانسیل

---

* این روش برای مراتب بالاتر هم صادق است.

$$y\,y''-(y')^2-6\,x\,y^2=0 \qquad (1)$$

را حل کنید.

حل. معادلهٔ (۱) نسبت به y و y' و y'' همگن می‌باشد. پس فرض می‌کنیم

$$y=e^{\int z\,dx}\ ,\ y'=z\,e^{\int z\,dx}\ ,\ y''=(z'+z^2)\,e^{\int z\,dx} \qquad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$e^{2\int z\,dx}\,[\,z^2+z'-z^2-6\,x\,]=0$$

$$z'=6\,x \Rightarrow z=3\,x^2+c_1$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد

$$y=e^{\int(3x^2+c_1)dx+c_2'}$$

$$=c_2e^{x^3+c_1x}$$

مثال ۳.۹۳. معادله دیفرانسیل

$$2\,y\,y''-3\,y'^2=4\,y^2 \qquad (1)$$

را حل کنید.

حل. معادلهٔ (۱) نسبت به y و y' و y'' همگن می‌باشد. با جایگذاری

$$y=e^{\int z\,dx}\ ,\ y'=z\,e^{\int z\,dx}\ ,\ y''=(z'+z^2)\,e^{\int z\,dx} \qquad (2)$$

در (۱) داریم،

$$e^{2\int z\,dx}\,[\,2\,z'+2\,z^2-3\,z^2-4\,]=0$$

$$2\,z'=4+z^2$$

$$\frac{2\,dz}{z^2+4}=dx$$

$$\int\frac{2\,dz}{z^2+4}=\int dx+c_1$$

$$\tan^{-1}\frac{z}{2}=x+c_1 \Rightarrow z=2\tan(x+c_1)$$

$$\int z\,dx=2\int \tan(x+c_1)\,dx+c_2'$$

$$=-2\,Ln\cos(x+C_1)+C_2'$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y=e^{-2\,Ln\cos(x+c_1)+c_2'}$$

$$=\frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$$

ث) معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم به‌فرم

$$f(x)\,y''+f_1(x)\,y'+f_2(x)\,y=Q(x) \qquad (۱۶)$$

را کامل گوییم، اگر بتوان (۱۶) را به‌فرم زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}\,[\,f(x)\,y'+(f_1(x)-f'(x))\,y\,]=Q(x) \qquad (۱۷)$$

در ضمن شرط لازم و کافی برای آنکه (۱۶) کامل باشد، آن است که

$$f''(x)-f_1'(x)+f_2(x)=0 \qquad (۱۸)$$

مثال ۳.۹۴. نشان دهید معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x^2-2x)\,y''+4(x-1)\,y'+2\,y=e^{2x} \qquad (1)$$

کامل است و سپس آنرا حل کنید.

حل. ابتدا شرط (۱۸) را بررسی می‌کنیم

$$f''(x)=2\ ,\ f_1'(x)=4$$

$$f''-f_1'+f_2=2-4+2=0$$

پس، معادلهٔ (۱) کامل است. لذا به‌فرم (۱۷) نوشته می‌شود.

$$\frac{d}{dx}[\,(x^2-2x)\,y'+2(x-1)\,y\,]=e^{2x}$$

$$(x^2-2x)\,y'+2(x-1)\,y=\frac{1}{2}\,e^{2x}+c_1$$

$$y' + \frac{2x-2}{x^2-2x}\, y = \frac{e^{2x}}{2(x^2-2x)} + \frac{c_1}{x^2-2x} \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲)، خطی مرتبهٔ اول می‌باشد و جواب عمومی به‌فرم زیر است :

$$y = \frac{1}{x^2-2x}\left[\int\left(\frac{e^{2x}}{2}+c_1\right)dx + c_2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{2x}}{x^2-2x} + \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x^2-2x}$$

مثال ۳.۹۵. نشان دهید معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'' - y'\cos x + y\sin x = 0\ ,\quad x>0 \qquad (۱)$$

کامل است و سپس آنرا حل کنید.

حل. ابتدا شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم،

$$f''=0\ ,\ f_1'=\sin x$$

$$f''-f_1'+f_2 = 0 - \sin x + \sin x = 0$$

لذا معادلهٔ (۱) کامل بوده و به‌فرم (۱۷) نوشته می‌شود.

$$\frac{d}{dx}\left[xy' - (\cos x+1)y\right] = 0$$

$$xy' - (\cos x+1)y = c_1$$

$$y' - \frac{\cos x+1}{x}\, y = \frac{c_1}{x} \qquad (۲)$$

معادله (۲) خطی مرتبهٔ اول است و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = \frac{1}{F(x)}\left[c_1\int\frac{F(x)}{x}dx + c_2\right]\ ,\ F(x) = e^{-\int\frac{\cos x+1}{x}dx}$$

ج) معادله کشی یا معادله اویلر*

* Euler

صورت کلی این معادله به‌فرم

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\, x y' + a_n y = f(x) \qquad (۱۹)$$

یا

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x) \qquad (۲۰)$$

که به‌ترتیب با استفاده از تغییر متغیرهای $x=e^z$ و $ax+b=e^z$ تبدیل به معادلهٔ خطی مرتبه n ، با ضرایب ثابت می‌شوند. درستی مطلب را برای مرتبهٔ دوم اثبات می‌کنیم و طریقه حل این نوع معادلات را ارائه می‌دهیم.

$$x^2y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x) \qquad (۲۱)$$

حال نشان می‌دهیم که (۲۱) با استفاده از تغییر متغیر زیر تبدیل به معادله مرتبهٔ دوم خطی با ضرایب ثابت می‌شود.

$$x=e^z \Rightarrow z = Ln\,x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \qquad (۲۲)$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری (۲۲) و (۲۳) در (۲۱) داریم :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a_1-1)\frac{dy}{dz} + a_2 y = f(e^z) \qquad (۲۴)$$

معادلهٔ (۲۴) یک معادلهٔ خطی با ضرایب ثابت است و معادلهٔ مفسر به‌صورت زیر می‌باشد :

$$t^2 + (a_1-1)t + a_2 = 0 \qquad (۲۵)$$

حال اگر معادلهٔ مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز $t_1 \neq t_2$ باشد، در این صورت

$$y_1 = e^{t_1 z} = e^{t_1 Ln x} = x^{t_1}$$

و

$$y_2 = e^{t_2 z} = e^{t_2 Ln x} = x^{t_2}$$

و جواب عمومی معادله‌ٔ همگن متناظر به فرم زیر می‌باشد:

$$y_h = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$ (۲۶)

و اگر معادله‌ٔ مفسر دارای ریشه مضاعف حقیقی t باشد،

$$y_1 = e^{tz} = e^{tLnx} = x^t$$

و

$$y_2 = z e^{tz} = e^{tLnx} Lnx = x^t Lnx$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر را به‌فرم زیر خواهیم داشت:

$$y_h = (c_1 + c_2 Lnx) x^t$$ (۲۷)

و اگر معادله‌ٔ مفسر دارای ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد، جواب عمومی معادله همگن متناظر به‌فرم زیر می‌شود:

$$y_h = e^{pz}(C_1 \cos qz + C_2 \sin qz)$$

$$= x^p (C_1 \cos(q Lnx) + C_2 \sin(q Lnx))$$ (۲۸)

و برای بدست آوردن جواب عمومی معادله‌ٔ (۲۱) با توجه به $f(e^z)$ ، y_p را با استفاده از روشهای گفته شده حساب می‌کنیم و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = y_h + y_p$$

تذکر ۴. می‌توان برای پیدا کردن جواب عمومی معادله‌ٔ همگن متناظر (۲۱) یعنی

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$$ (۲۹)

یک جواب را به فرم $y = x^t$ در نظر گرفت؛ به‌این ترتیب که $y = x^t$ و مشتقات آن را در (۲۹) جایگذاری می‌کنیم

$$y = x^t \ , \ y' = t x^{t-1} \ , \ y'' = t(t-1) x^{t-2}$$

$$x^t [t^2 + (a_1 - 1)t + a_2] = 0$$

پس $y = x^t$ می‌تواند یک جواب (۲۹) باشد. اگر t ریشه معادله‌ٔ کمکی زیر

$$t^2 + (a_1 - 1)t + a_2 = 0$$ (۳۰)

انتخاب شده. همانطور که ملاحظه می‌کنید (۳۰) همان (۲۵) می‌باشد.
حال اگر (۳۰) دارای دو ریشه متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2$ باشد؛ در این صورت

$$y_1 = x^{t_1} \ , \ y_2 = x^{t_2}$$

$$y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$ (۳۱)

و اگر (۳۰) دارای ریشه مضاعف حقیقی t باشد؛ در این صورت $y_1 = x^t$ و برای بدست آوردن جواب دوم، از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم. یعنی جواب دوم را به‌فرم $y_2 = u(x) y_1$ در نظر می‌گیریم (این روش در قسمت بعد گفته خواهد شد). و با جایگذاری y_2 ، y_2' و y_2'' در (۲۹)، $u(x)$ را حساب می‌کنیم و جواب دوم به‌فرم $y_2 = x^t Lnx$ خواهد بود و جواب عمومی (۲۹) عبارت است از:

$$y = (c_1 + c_2 Lnx) x^t$$

و اگر (۳۰) دارای ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد؛ در این صورت

$$y_1 = x^{p+iq} \ , \ y_2 = x^{p-iq}$$ (۳۲)

و

$$y = x^p (c_1 x^{iq} + c_2 x^{-iq})$$

$$= x^p (c_1 e^{iqLnx} + c_2 e^{-iqLnx})$$ (۳۳)

با استفاده از فرمول اولر و انتخاب

$$c_1 = \frac{1}{2}(A - iB) \ , \ c_2 = \frac{1}{2}(A + iB)$$

و جایگذاری در (۳۲) داریم:

$$y = x^p \left(\frac{1}{2}(A - iB)(\cos(q Lnx)) + \frac{1}{2}(A + iB)(\sin(q Lnx))\right)$$

$$= x^p (A \cos(q Lnx) + B \sin(q Lnx))$$ (۳۴)

مثال ۳ . ۹۶. معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

را حل کنید.

حل. ابتدا معادله‌ٔ کمکی را طبق فرمول (۳۰) تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم

$$t^2 + 0t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \ , \ t_2 = -1$$

پس معادله کمکی دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد و مطابق فرمول (۳۱)، جواب عمومی به‌فرم زیر است:

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

مثال ۳ . ۹۷ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y''-xy'+y=0$$

را حل کنید .

حل . ابتدا معادلهٔ کمکی را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم .

$$t^2-2t+1=0 \Rightarrow t_1=t_2=1$$

معادلهٔ کمکی دارای ریشه مضاعف می‌باشد و با توجه به فرمول (۳۲) ، جواب عمومی به‌فرم زیر است :

$$y=(c_1+c_2\,Lnx)x$$

مثال ۳ . ۹۸ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y''+3xy'+5y=0$$

را حل کنید .

حل . معادلهٔ کمکی را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم .

$$t^2+2t+5=0 \Rightarrow t=-1\pm 2i$$

و مطابق فرمول (۳۴) جواب عمومی را به‌فرم زیر خواهیم داشت :

$$y=x^{-1}\left(A\cos(2Lnx)+B\sin(2Lnx)\right)$$

مثال ۳ . ۹۹ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y''-2xy'+2y=Ln^2x-Lnx^2 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل . با استفاده از تغییر متغیر $x=e^z$ و با توجه به فرمول (۲۴) داریم ،

$$\frac{d^2y}{dz^2}-3\frac{dy}{dz}+2y=z^2-2z \qquad (2)$$

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t_1=1\ ,\ t_2=2$$

و جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر (۲) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y_h=c_1e^z+c_2e^{2z}$$
$$=c_1x+c_2x^2$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلهٔ (۲) ، از روش ضرایب نامعینی استفاده کرده .

$$y_p=Az^2+Bz+C$$

y_p و y'_p و y''_p را در (۲) جایگذاری می‌کنیم و ضرایب را بدست می‌آوریم و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{2}Ln^2x+\frac{1}{2}Lnx+\frac{1}{4}$$

مثال ۳ . ۱۰۰ . معادله دیفرانسیل

$$x^2y''-2xy'+2y=x^3\cos x \qquad (1)$$

را حل کنید .*

حل . ابتدا معادله را بر ضریب y'' تقسیم نموده و از روش عمومی (روش تغییر پارامترها) استفاده می‌کنیم ،

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=x\cos x \qquad (2)$$

حال جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را بدست می‌آوریم

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0 \Rightarrow x^2y''-2xy'+2y=0 \qquad (3)$$

(۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل‌کشی می‌باشد و معادلهٔ کمکی را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم .

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t_1=1\ ,\ t_2=2$$
$$y_h=c_1x+c_2x^2$$

---

* به‌روش حل این مثال دقت بیشتری شود چون با این روش مساله ساده‌تر حل می‌شود . البته می‌توان از روشی هم که در مثال قبل گفته شد مسئله را حل نمود .

با فرض

$$y_1=x\ ,\ y_2=x^2$$

$$W=y_1y_2'-y_1'y_2=2x^2-x^2=x^2$$

$$y_p=-x\int\frac{x^2(x\cos x)}{x^2}dx+x^2\int\frac{x(x\cos x)}{x^2}dx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+x^2\sin x=-x\cos x$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=c_1x+c_2x^2-x\cos x$$

مثال ۳ . ۱۰۱ . معادله دیفرانسیل

$$(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=2\cos Ln(1+x) \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . با استفاده از تغییر متغیر زیر، معادله را تبدیل به یک معادله با ضرایب ثابت می‌کنیم

$$1+x=e^z \Rightarrow z=Ln(1+x)\ ,\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x}\ \frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)$$

با جایگذاری مقادیر بالا در (۱) داریم ،

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y=2\cos z \qquad (۲)$$

$$t^2+1=0 \Rightarrow t=\pm i$$

$$y_h=C_1\cos z+C_2\sin z$$

و با استفاده از روش ضرایب نامعین

$$y_p=z(A\cos z+B\sin z)$$

برای تعیین ضرایب A و B ، " y_p و y_p'' " را در (۲) قرار می‌دهیم . جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=C_1\cos Ln(1+x)+C_2\sin Ln(1+x)+Ln(1+x)\sin Ln(1+x)$$

چ) در معادلهٔ دیفرانسل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب متغیر

$$y''+y'f_1(x)+yf_2(x)=f_3(x) \qquad (۳۵)$$

که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابعی پیوسته هستند، و یک جواب خصوصی معادلهٔ همگن متناظر موجود باشد، در این صورت با استفاده از روش تغییر پارامتر، جواب عمومی را به‌فرم $y=u(x)y_1$ در نظر می‌گیریم و برای تعیین $u(x)$ ، y و y' و y'' را در (۳۵) جایگذاری می‌کنیم .

$$(۳۶)\quad y=uy_1\ ,\ y'=u'y_1+uy_1'\ ,\ y''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$$

$$(۳۷)\quad u(y_1''+y_1'f_1+y_1f_2)+u'(2y_1'+y_1f_1)+u''y_1=f_3$$

پرانتز اول سمت چپ عبارت بالا صفر است (چون y_1 یک جواب معادلهٔ همگن متناظر می‌باشد) و با تقسیم طرفین (۳۷) بر y_1 داریم :

$$u''+u'\left(\frac{2y_1'}{y_1}+f_1\right)=\frac{f_3}{y_1} \qquad (۳۸)$$

و با فرض

$$u'=p\ ,\ u''=p'$$

$$p'+p\left(\frac{2y_1'}{y_1}+f_1\right)=\frac{f_3}{y_1} \qquad (۳۹)$$

(۳۹) معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول می‌باشد که‌از حل‌آن p بدست می‌آید و گرفتن انتگـــرال از p ، $u(x)$ بدست می‌آید . و اگر $f_3(x)\equiv 0$ باشد، آنگاه (۳۹) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$p'+p\left(\frac{2y_1'}{y_1}+f_1\right)=0 \qquad (۴۰)$$

$$\frac{p'}{p}+\frac{2y_1'}{y_1}=-f_1$$

$$Ln\,p+Ln\,y_1^2=-\int f_1\,dx$$

$$p = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1 dx}$$

و

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1 dx} dx \qquad (۴۱)$$

تذکر ۵. وقتی (۳۵) همگن باشد می‌توان (۴۱) را بدون منظور کردن ثابتهای انتگرالگیری بدست آورد. و در این صورت $y_2 = u(x) y_1$ و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال ۳ . ۱۰۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y' + y e^{2x} = x e^{2x} - 1 \qquad (۱)$$

را حل کنید، اگر $y_1 = \sin e^x$ باشد.

حل. جواب عمومی به‌فرم $y = u(x) \sin e^x$ می‌باشد و برای محاسبه u، طبق فرمول (۳۸) داریم:

$$u'' + u'\left(\frac{2 e^x \cos e^x}{\sin e^x} - 1\right) = \frac{x e^{2x} - 1}{\sin e^x} \qquad (۲)$$

و با فرض $u'' = p'$, $u' = p$

$$p' + p\left(\frac{2 e^x \cos e^x}{\sin e^x} - 1\right) = \frac{x e^{2x} - 1}{\sin e^x} \qquad (۳)$$

(۳) یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌باشد. و

$$p = e^{-2 Ln sin e^x + x} \left[\int \frac{x e^{2x} - 1}{\sin e^x} e^{2 Ln sin e^x - x} dx + c_1\right]$$

$$= \frac{e^x}{\sin^2 e^x} \left[\int (x e^x - e^{-x}) \sin e^x dx + c_1\right]$$

$$= \frac{e^x}{\sin^2 e^x} \left[-x \cos e^x + \frac{\sin e^x}{e^x} + c_1\right]$$

$$= \frac{-x e^x \cos e^x}{\sin^2 e^x} + \frac{1}{\sin e^x} + \frac{c_1 e^x}{\sin^2 e^x}$$

و

$$u(x) = \int \frac{-x e^x \cos e^x}{\sin^2 e^x} dx + \int \frac{dx}{\sin e^x} + c_1 \int \frac{e^x}{\sin^2 e^x} dx + c_2$$

$$= \frac{x}{\sin e^x} - \int \frac{dx}{\sin e^x} + \int \frac{dx}{\sin e^x} + c_1 \frac{\cos e^x}{\sin e^x} + c_2$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = x + C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x .$$

در حالات زیر قادر هستیم $y_1(x)$ را تعیین کنیم

آ. اگر $f_1 + x f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = x$

ب. اگر $1 + f_1 + f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = e^x$

پ. اگر $1 - f_1 + f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = e^{-x}$

ت. اگر $a^2 + a f_1 + f_2 = 0$ باشد، آنگاه $y_1 = e^{ax}$ (a یک عدد می‌باشد)

مثال ۳ . ۱۰۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2 y'' - x(x+2) y' + (x+2) y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا طرفین را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم.

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 0 \qquad (۲)$$

$y_1 = x$ یک جواب معادله (۲) می‌باشد، زیرا

$$f_1 + x f_2 = -\frac{x+2}{x} + \frac{x+2}{x} = 0$$

و چون معادله (۱) همگن می‌باشد، طبق فرمول (۴۱)، $u(x)$ را پیدا می‌کنیم

$$u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{\int (1 + \frac{2}{x}) dx} dx .$$

$$= \int \frac{1}{x^2} x^2 e^x dx$$

$$= e^x$$

و $y_2 = x e^x$ و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1 x + c_2 x e^x$$

مثال ۳ . ۱۰۴ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1+x^2) y'' - 2x y' + 2y = 2 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا طرفین را بر $(1+x^2)$ تقسیم می‌کنیم

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = \frac{2}{1+x^2} \qquad (۲)$$

$y_1 = x$ یک جواب معادله همگن متناظر (۲) می‌باشد . زیرا

$$f_1 + x f_2 = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

و جواب عمومی به‌فرم $y = x u(x)$ می‌باشد . و برای محاسبه $u(x)$ مطابق فرمول (۳۹) ، ابتدا p را محاسبه می‌کنیم و سپس با گرفتن انتگرال از p ، $u(x)$ بدست می‌آید .

$$p' + p\left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{2}{x(1+x^2)}$$

$$p = \frac{1+x^2}{x^2}\left[\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2}{x(1+x^2)} dx + c_1\right]$$

$$= \frac{1+x^2}{x^2}\left[-\frac{1}{1+x^2} + c_1\right]$$

$$= \frac{-1}{x^2} + c_1 \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$u = -\int \frac{dx}{x^2} + c_1 \int \frac{1+x^2}{x^2} dx + c_2$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{c_1}{x} + c_1 x + c_2$$

و $y = x u(x)$

$$y = 1 - c_1 + c_1 x^2 + c_2 x$$

مثال ۳ . ۱۰۵ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x+1) y'' - (2x+3) y' + (x+2) y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا طرفین را بر $(x+1)$ تقسیم می‌کنیم

$$y'' - \frac{2x+3}{x+1} y' + \frac{x+2}{x+1} y = 0 \qquad (۲)$$

$y_1 = e^x$ زیرا

$$1 + f_1 + f_2 = 1 - \frac{2x+3}{x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 0$$

و $y_2 = e^x u(x)$ ، برای محاسبه $u(x)$ از فرمول (۴۱) استفاده می‌کنیم

$$u(x) = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{2x+3}{x+1} dx} dx$$

$$= \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x + Ln(x+1)} dx$$

$$= \int (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$y_2 = \frac{e^x}{2}(x+1)^2$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x (x+1)^2$$

مثال ۳ . ۱۰۶ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - \frac{3x+4}{x+1} y' + \frac{3}{x+1} y = \frac{3x+2}{x+1} e^{3x}$$

را حل کنید .

حل .

$$a^2+af_1+f_2=a^2-\frac{3ax+4a}{x+1}+\frac{3}{x+1}$$

$$=\frac{a^2x+a^2-3ax-4a+3}{x+1}$$

شرط‌آنکه عبارت فوق برابر صفر باشد ، آن است که صورت مساوی صفر باشد .

$$x(a^2-3a)+a^2-4a+3=0$$

حال باید a را طوری پیدا کنیم که به‌ازای آن هم ضریب x صفر شود و هم مقدار ثابت صفر شود .

$$a^2-3a=0 \Rightarrow a=0\,;\,a=3$$

$$a^2-4a+3=0 \Rightarrow a=3,1$$

پس $y_1=e^{3x}$ و $y_2=e^{3x}u(x)$ که برای محاسبه $u(x)$ ، ابتدا p را از فرمول (۳۹) بدست می‌آوریم

$$p'+p(6-\frac{3x+4}{x+1})=\frac{3x+2}{x+1}$$

$$p=e^{-3x}(x+1)[\int\frac{3x+2}{(x+1)^2}e^{3x}dx+c_1]$$

$$=e^{-3x}(x+1)[\int\frac{3}{x+1}e^{3x}dx-\int\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}dx+c_1]$$

$$=1+c_1e^{-3x}(x+1)$$

و

$$u=\int(1+c_1e^{-3x}(x+1))dx+c_2$$

$$=x+\frac{c_1}{9}(-4-3x)e^{-3x}+c_2$$

و جواب عمومی :

$$y=e^{3x}(x+c_2)+\frac{c_1}{9}(-4-3x)$$

ح) جواب به‌فرم $y=uv$

اگر در معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم

$$y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=f_3(x) \tag{۴۲}$$

y_1 بسادگی محاسبه نشود ، جواب عمومی را به‌فرم $y=uv$ در نظر می‌گیریم

$$y=uv\,,\,y'=u'v+uv'\,,\,y''=u''v+2u'v'+uv'' \tag{۴۳}$$

با جایگذاری (۴۳) در (۴۲) داریم

$$v(u''+f_1u'+f_2u)+v'(2u'+f_1u)+v''u=f_3 \tag{۴۴}$$

حال می‌خواهیم شرایط ساده‌کننده‌ای برای حل (۴۴) بیابیم . ضریب v را نمی‌توانیم صفر اختیار کنیم ، زیرا در این صورت قادر به حل ضریب v نیستیم و ضریب v'' را هم نمی‌توان صفر اختیار کرد زیرا با انتخاب $u=0$ ، جواب صفر می‌شود . پس باید ضریب v' را صفر اختیار کنیم .

$$2u'+f_1u=0 \Rightarrow \frac{u'}{u}=-\frac{f_1}{2}$$

$$Ln\,u=-\frac{1}{2}\int f_1dx$$

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int f_1dx} \tag{۴۵}$$

حال این u و u' و u'' را در (۴۴) جایگذاری می‌کنیم

$$u'=-\frac{1}{2}f_1u\,,\,u''=-\frac{1}{2}f_1'u+\frac{1}{4}f_1^2u$$

$$v(f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2)+v''=\frac{f_3}{u} \tag{۴۶}$$

و در حالات زیر می‌توانیم (۴۶) را حل نموده و v را بدست آوریم

آ . اگر $f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=a$ ، دراین‌صورت (۴۶) تبدیل به یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت می‌شود .

ب: اگر $f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=\frac{a}{x^2}$ ،دراین‌صورت (۴۶) تبدیل به یک معادله کشی می‌شود .

پ: اگر $f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2 = \frac{a}{(\alpha x + \beta)^2}$، دراین‌صورت (۴۶) تبدیل به یک معادله کشی می‌شود.

پس ابتدا عبارت $f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2$ را تشکیل می‌دهیم، چنانچه‌این مقدار برابر با a یا $\frac{a}{x^2}$ یا $\frac{a}{(\alpha x + \beta)^2}$ باشد، آنگاه u را از فرمول (۴۵) بدست آورده و سپس v را از یکی از معادلات زیر بدست می‌آوریم.

$$v'' + a v = \frac{f_3}{u} \qquad (۴۷)$$

$$x^2 v'' + a v = \frac{f_3}{u} x^2 \qquad (۴۸)$$

$$(\alpha x + \beta)^2 v'' + a v = \frac{f_3}{u} (\alpha x + \beta)^2 \qquad (۴۹)$$

تذکر ۶. u را بدون ثابت انتگرالگیری محاسبه می‌کنیم و در محاسبه v دو پارامتر منظور می‌شود.

مثال ۳.۱۰۷. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - 2 y' \tan x - 10 y = 0$$

را حل کنید.

حل.

$$f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2 = -10 + 1 + \tan^2 x - \tan^2 x = -9$$

$$u = e^{\int \tan x \, dx} = e^{-\ln \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

و با توجه به فرمول (۴۷) داریم،

$$v'' - 9 v = 0$$

$$t^2 - 9 = 0 \Rightarrow t = \pm 3$$

$$v = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

و جواب عمومی به‌فرم $y = u v$ می‌باشد:

$$y = \frac{1}{\cos x} (c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x})$$

مثال ۳.۱۰۸. معادله دیفرانسیل

$$y'' - \frac{2}{x} y' + (1 + \frac{2}{x^2}) y = x e^x$$

را حل کنید.

حل.

$$f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2 = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1$$

$$u = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

و با توجه به فرمول (۴۷) داریم:

$$v'' + v = e^x$$

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$$

$$v_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$v_p = \frac{1}{2} e^x$$

$$v = v_h + v_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

و جواب عمومی به‌فرم $y = u v$ می‌باشد:

$$y = x (C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x)$$

مثال ۳.۱۰۹. معادله دیفرانسیل

$$y'' + x y' + (\frac{x^2 + 1}{2 x})^2 y = 0$$

را حل کنید .

حل .

$$f_2 - \frac{1}{2} f_1' - \frac{1}{4} f_1^2 = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4x^2}$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int x\,dx} = e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

و با توجه به فرمول (۴۸) داریم ،

$$x^2 v'' + \frac{1}{4} v = 0$$

که یک معادلهٔ کشی می باشد . معادله کمکی را تشکیل می دهیم و ریشه های آن را حساب می کنیم .

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$$
$$v = (c_1 + c_2 \, Ln\, x)\, x^{1/2}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می باشد :

$$y = x^{1/2}\, e^{-\frac{x^2}{4}}\, (c_1 + c_2\, Ln\, x)$$

مجموعه مسائل ۸٫۳

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید .

۱. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

۲. $y'' = x + \sin x$

۳. $y^{(4)} = \dfrac{1}{x}$

۴. $x^2 y'' = y'^2$

۵. $x y'' = y' \, Ln \dfrac{y'}{x}$

۶. $y'' + y' \tan x = \sin 2x$

۷. $x y'' + y' = y'^2$

۸. $y'' + y'^2 = 0$

۹. $x y'' - y' = x^2 e^x$

۱۰. $y' y'' = -x$

۱۱. $x y'' - y' - x \sin \dfrac{y'}{x} = 0$

۱۲. $2 y y'' = 1 + y'^2$

۱۳. $y y'' = -y'^2$

۱۴. $y y'' = y^2 y' + y'^2$

۱۵. $(y-1) y'' = 2 y'^2$

۱۶. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$

۱۷. $2 y y'' - 3 y'^2 = 4 y^2$

۱۸. $y y'' + y'^2 = x$

۱۹. $x^2 y'' = y - x y'$

۲۰. $x^2 y y'' = (y - x y')^2$

۲۱. $y'' + x y' + y = 0$

۲۲. $x^2 y'' - 3 x y' + 4 y = 0$

۲۳. $x^2 y'' - 3 x y' + 3 y = 0$

۲۴. $x^2 y'' + x y' + 4 y = 0$

۲۵. $x^2 y'' - 3 x y' + 5 y = 3 x^2$

۲۶. $(x + 2)^2 y'' + 3 (x + 2) y' - 3 y = 0$

۲۷. $x^2 y'' - 6 y = 12 \, Ln x$

۲۸. $x^2 y'' + x y' - y = 4$

۲۹. $x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = x^4$

۳۰. $x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = \frac{1}{x^2}$

۳۱. $(1 + x^2) y'' - 2 x y' + 2 y = \frac{1 - x^2}{x}$

۳۲. $(x^2 + 4) y'' - 2 x y' + 2 y = 8$

۳۳. $(x \sin x + \cos x) y'' - x \cos x \, y' + y \cos x = x$

۳۴. $x y'' - (2x + 1) y' + (x + 1) y = (x^2 + x - 1) e^{2x}$

۳۵. $(x - 2) y'' - (4x - 7) y' + (4x - 6) y = 0$

۳۶. $y'' - 4 x y' + 4 x^2 y = x e^{x^2}$

۳۷. $x^2 y'' + (x - 4x^2) y' + (1 - 2x + 4x^2) y = (x^2 - x + 1) e^x$

فصل چهارم

۴

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سریها

در فصل گذشته حالات بسیار خاصی از معادلات خطی با ضرایب متغیر را بررسی نمودیم؛ و اکنون در این فصل به بحث گسترده‌تری دربارهٔ این نوع معادلات می‌پردازیم و بیشترین صحبت را به حل معادله‌ای به‌شکل

$$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0 \qquad (۱)$$

که f_1 ، f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای برحسب x می‌باشند، اختصاص می‌دهیم تا توانایی‌های لازم برای حل دو معادلهٔ بسیار مهم:

معادلهٔ لژاندر $$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (۲)$$

معادلهٔ بسل $$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0 \qquad (۳)$$

را کسب کرده باشیم.

بدیهی است روشی که ارائه می‌شود، برای حل معادلات با ضرایب ثابت هم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد؛ با این تفاوت که بسیار مشکلتر از روش گفته شده در فصل قبل خواهد بود. در این روش، جواب را به‌فرم سری توانی در نظر می‌گیریم و به‌همین علت هم آن را **روش سری توانی** می‌نامیم. لازم می‌دانیم قبل از آنکه به بحث درمورد حل معادلات به‌کمک سری توانی بپردازیم، بخش اول را به بحث مختصری دربارهٔ سریها اختصاص دهیم.

۴.۱۰ سری

تعریف ۴.۱۰. مجموع جمله‌های یک دنبالهٔ بی‌نهایت را یک سری می‌نامیم

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (۱)$$

u_1 ، u_2 ، … و u_n و … را جمله‌های سری و u_n را جملهٔ عمومی سری می‌گوییم .

اگر تمام جمله‌های یک سری اعداد باشند ، چنین سری را یک سری عددی ، و اگر جمله‌های سری توابعی از x باشند ، سری را **سری تابع** می‌نامیم .

مثال ۴ . ۱ . سری زیر یک سری عددی می‌باشد

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

مثال ۴ . ۲ . سری زیر یک سری تابع می‌باشد

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

مطالعه خود را با سری عددی شروع می‌کنیم و سپس درمورد سری تابع بحث خواهیم کرد .

همگرایی و واگرایی سریها

مجموع n جملهٔ اول سری (۱) را با S_n نمایش می‌دهیم

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

اگر حد S_n وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند موجود و برابر L باشد ، آنگاه سری را همگرا می‌گوییم و L را مجموع سری (۱) می‌نامیم و اگر حد S_n وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند موجود نباشد ، سری را واگرا می‌گوییم .

مثال ۴ . ۳ . سری زیر را بررسی می‌کنیم

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

می‌دانیم که یک سری هندسی با قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ می‌باشد و

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

از طرفی می‌دانیم در یک سری هندسی

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

که a جمله اول می‌باشد ، پس

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$$

پس سری همگرا می‌باشد .

مثال ۴ . ۴ . سری

$$t+t+\cdots+t+\cdots \qquad , t\neq 0$$

را بررسی می‌کنیم ،

$$s_n=nt$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} nt=\infty$$

و سری واگرا می‌باشد .

مثال ۴ . ۵ . سری

$$t-t+t-t+\cdots+(-1)^{n-1}t+\cdots$$

را بررسی می‌کنیم

$$s_n=\begin{cases} 0 & \text{اگر زوج باشد} \\ t & \text{اگر فرد باشد} \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n$ موجود نیست

و سری واگرا می‌باشد .

قضیه ۴ . ۱ . اگر تعدادی از جمله‌های یک سری را حذف کنیم ، نوع سری تغییر نمی‌کند .

قضیه ۴ . ۲ . اگر تمام جمله‌های یک سری را در عددی مخالف صفر ضرب کنیم ، نوع سری تغییر نمی‌کند یعنی دو سری با جمله‌های عددی u_n و au_n هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند .

قضیه ۴ . ۳ . اگر دو سری زیر به‌ترتیب به L_1 و L_2 همگرا باشند .

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$$
$$v_1+v_2+\dots+v_n+\dots$$

آنگاه سری‌های زیر به‌ترتیب به L_1+L_2 و L_1-L_2 همگرا می‌باشند .

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\dots+(u_n+v_n)+\dots$$
$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\dots+(u_n-v_n)+\dots$$

قضیه ۴ . ۴ . (شرط لازم همگرایی)

اگر سری $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

اثبات . فرض کنید S_n مجموع n جملهٔ اول سری و S_{n-1} مجموع $n-1$ جملهٔ اول سری باشد ، پس

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

و چون سری همگراست ، لذا وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند S_n و S_{n-1} هر دو به‌سمت L میل می‌کنند و داریم

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1})$$
$$= L - L = 0$$

توجه ۱ . اگر در یک سری $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ باشد ، آن سری واگرا می‌باشد ، و اگر $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ باشد دلیل بر همگرایی سری نیست .

مثال ۴ . ۶ . نوع سری زیر را مشخص کنید .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+4}$$

حل .

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+4}$$
$$= \frac{3}{2} \neq 0$$

پس سری واگرا می‌باشد .

برای تعیین نوع یک سری ، از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم :

دستور دالامبر . در سری با جمله‌های مثبت

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$$

نسبت جمله $n+1$ به‌جمله n ام‌را تشکیل می‌دهیم و حد این نسبت را وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم ، اگر این حد موجود و برابر L باشد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = L$$

آنگاه

(آ) اگر $0 \leqslant L < 1$ ، سری همگرا می‌باشد .

(ب) اگر $L > 1$ ، سری واگرا می‌باشد .

(پ) اگر $L = 1$ ، از این دستور نمی‌توان نوع سری را مشخص کرد .

مثال ۴ . ۷ . نوع سری

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2n-1}{2^n}+\dots$$

را مشخص کنید .

حل .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

پس سری همگرا می‌باشد .

مثال ۴ . ۸ . نوع سری

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

را مشخص کنید .

حل .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

پس سری همگرا می‌باشد .

دستور کوشی . در سری ؛ جمله‌های مثبت

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ریشه n ام جمله عمومی را حساب کرده و سپس حد آن را ، وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند ، پیدا می‌کنیم ، اگر این حد موجود و برابر L باشد .

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

آنگاه

(آ) اگر $0 \le L < 1$ ، سری همگرا می‌باشد .

(ب) اگر $L > 1$ ، سری واگرا می‌باشد

(پ) اگر $L = 1$ ، از این دستور نمی‌توان نوع سری را مشخص کرد .

مثال ۴ . ۹ . نوع سری

$$\frac{2}{1} + (\frac{3}{3})^2 + (\frac{4}{5})^3 + \dots + (\frac{n+1}{2n-1})^n + \dots$$

را تعیین کنید .

حل .

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n+1}{2n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$$

پس سری همگرا می‌باشد .

تعریف ۴ . ۲ . سری متناوب ، سری‌ای می‌باشد که جمله‌های آن یکی در میان مثبت و منفی است .

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots \quad , \; u_i > 0$$

قضیهٔ ۴ . ۵ . (قضیه *لایبنیتز**) اگر در یک سری متناوب

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > u_{n+1} > \dots$$

و

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

آنگاه سری همگرا می‌باشد و مقدار آن از جمله اول بیشتر نیست .

مثال ۴ . ۱۰ . نوع سری

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

را مشخص کنید .

حل . سری (۱) متناوب می‌باشد و

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots$$

و

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

* Leibnitz Theorem

پس سری همگراست .

مثال ۴ . ۱۱ . نوع سری

$$1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}+\dots \qquad (1)$$

را مشخص کنید .

حل . سری (۱) متناوب است و

$$1>\frac{2}{7}>\frac{3}{13}>\dots$$

ولی

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}$$

$$=\frac{1}{6}\neq 0$$

پس سری واگرا می‌باشد .

سری با جمله‌های مثبت و منفی

اگر در یک سری ، هم جمله مثبت و هم جمله منفی داشته باشیم . آن‌را یک سری با جمله‌های مثبت و منفی می‌گوییم . و چون برای مثبت و منفی بودن ، جمله‌های ترتیبی نداریم ، لذا برای همگرایی سری نمی‌توان دستوری بیان کرد که شامل کلیه حالات مختلف آن باشد . لذا فقط شرط کافی برای همگرایی این سری را بیان می‌کنیم .

قضیهٔ ۴ . ۶ . شرط کافی برای همگرایی سری با جمله‌های مثبت و منفی آن است که سری حاصل از قدر مطلق جمله‌ها ، همگرا باشد .

تذکر ۱ . این شرط لازم نیست ، یعنی سریهایی با جمله‌های مثبت و منفی وجود دارند که همگرا هستند ولی سری حاصل از قدر مطلق جمله‌ها ، واگرا می‌باشد .

تعریف ۴ . ۳ . سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ را **همگرای مطلق** می‌نامیم ، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ همگرا

باشد .

تعریف ۴ . ۴ . اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا باشد ، ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ واگرا ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ را **همگرای مشروط** می‌نامیم .

مثال ۴ . ۱۲ . همگرایی سری زیر را بررسی کنید .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{1}{3}n\pi}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1^2}-\frac{\frac{1}{2}}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{\frac{1}{2}}{4^2}+\dots+\frac{\cos\frac{1}{3}n\pi}{n^2}+\dots$$

حل . سری قدر مطلق را بررسی می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\cos\frac{1}{3}n\pi\right|}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

از طرفی می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ یک سری P می‌باشد ، با $P=2$ پس همگراست . لذا سری قدر مطلق نیز همگرا است و در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{1}{3}n\pi}{n^2}$ همگرا می‌باشد .

سری تابع

سری است که جمله‌های آن توابعی از متغیر x باشند ، مانند :

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots$$

واضح است که وقتی به x مقادیر مختلف را نسبت دهیم ، سریهای عددی متفاوتی خواهیم داشت که برخی از آنها همگرا و برخی ممکن است واگرا باشند . مجموعهٔ تمام مقادیر x را که به‌ازای آنها سری همگرا باشد ، **میدان همگرایی سری** می‌نامیم .

سری توانی

از مهمترین انواع سریهای تابع ، سری توانی است که به‌فرم

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (2)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^n+\dots \qquad (3)$$

می‌باشد که برحسب توانهای صعودی و صحیح و مثبت x یا $x-a$ مرتب شده‌اند.

و $(x-a)^0=1$ ، حتی اگر $x=a$ باشد. ضرایب c_0 و c_1 و ...، مقادیر ثابت هستند و a نیز عدد ثابتی است. چون x متغیر می‌باشد، پس ممکن است مقادیر منفی را نیز اختیار کند و همین‌طور چون c_i ها مقادیر ثابت هستند ممکن است بعضی از آنها مثبت و بعضی منفی باشند. لذا در حالت کلی، سری به‌فرم یک سری با جمله‌های مثبت و منفی درمی‌آید و باید برای تعیین همگرایی آن، سری جمله‌های قدر مطلق را در نظر بگیریم و در واقع همگرایی مطلق را تعیین کنیم که معمولا" از دستور دالامبر استفاده می‌کنیم. طرز عمل به‌شرح زیر می‌باشد:

برای فرمول (۲)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}x\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

و طبق دستور دالامبر این سری وقتی همگرا می‌باشد که

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$$

با فرض اینکه

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{R} \qquad (۴)$$

داریم:

$$|x|\frac{1}{R} < 1 \Rightarrow |x| < R \qquad (۵)$$

یعنی فاصله $(-R, R)$، میدان همگرایی می‌باشد. یعنی به‌ازای x های متعلق به این فاصله، سری (۲) همگرا و به‌ازای x های خارج از این فاصله واگرا می‌باشد.

تذکر ۲. به‌ازای $x=R$ و $x=-R$ ممکن است سری، همگرا و یا واگرا باشد که باید مستقیما" بررسی شود.

تعریف ۴ . ۵. عدد مثبت R در فرمول (۴) را **شعاع همگرایی** می‌نامیم.

مثال ۴ . ۱۳. شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

حل. با توجه به فرمول (۴) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1$$

$$R=1$$

مثال ۴ . ۱۴. شعاع همگرایی سری زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2x^2 + \dots$$

حل. با توجه به فرمول (۴) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \infty$$

و $R=0$، یعنی سری فقط به‌ازای $x=0$ همگرا می‌باشد.

قضیه ۴ . ۷. اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برابر $R>0$ باشد، آنگاه سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n x^{n-1}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ نیز همگرا و شعاع همگرایی آنها نیز برابر R می‌باشد.*

قضیه ۴ . ۸. اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ برابر $R>0$ باشد، آنگاه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$ نیز برابر R می‌باشد.**

حال اگر سری به‌فرم (۳) باشد، برای تعیین شعاع همگرایی فرض می‌کنیم

$$x-a=T \qquad (۶)$$

پس سری (۳) به‌فرم زیر بیان می‌شود،

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \dots$$

* و ** اثبات در کتاب

The Calculus Withanalgtic Geometry , by Louis Leithold , P. 714 , 715

و با توجه به (۵) داریم

$$|T| < R \Rightarrow -R < T < R$$

و

$$-R < x - a < R \Rightarrow a - R < x < R + a$$

یعنی فاصله همگرایی $(a-R\,,a+R)$ می‌باشد.

مثال ۴ . ۱۵ . فاصله همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \qquad (1)$$

حل. با فرض $x - 1 = T$ سری (۱) به فرم زیر بیان می‌شود،

$$\sum_{n=1}^{\infty} T^n$$

و با توجه به فرمول (۴) داریم

$$\frac{1}{R} = Lim \left|\frac{1}{1}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

و

$$-1 < T < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

سری تیلور* و سری ماک لورن**

فرض کنیم تابع $f(x)$ تابعی باشد که خود و تمام مشتقاتش در فاصله‌ای اطراف $x = x_0$ موجود باشند. می‌خواهیم این تابع را نسبت به قوای صعودی $x - x_0$ به‌فرم سری توانی بنویسیم

$$(7)\quad f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots$$

حال می‌خواهیم ضرایب c_0 و c_1 و c_2 و ... و c_n و ... را پیدا کنیم، برای این کار

---

* Taylor Serie

** Maclaurin Serie

در (۷) به‌جای x مقدار x_0 را می‌گذاریم، داریم

$$f(x_0) = c_0 \qquad (8)$$

برای تعیین بقیه ضرایب، مشتقات متوالی $f(x)$ را می‌گیریم

$$(9)\quad \begin{cases} f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \dots + nc_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \\ f''(x) = 2c_2 + 3\times 2c_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \dots \\ \\ f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2c_n + (n+1)n(n-1) \\ (n-2)\dots 3c_{n+1}(x-x_0) + \dots \end{cases}$$

در دستگاه (۹) به‌جای x مقدار x_0 را قرار می‌دهیم، داریم

$$c_1 = f'(x_0) \quad , \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad , \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

و بطور کلی

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (10)$$

قضیه ۴ . ۹ . فرض کنیم $f(x)$ تابعی باشد بطوری که $f(x)$ و تمام مشتقاتش در فاصله $(x_0 - R\,, x_0 - R)$ موجود باشند، آنگاه بسط تیلور تابع $f(x)$ برای تمام x هایی که $|x - x_0| < R$ است به‌فرم زیر

$$(11)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

خواهد بود، اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

که ξ_n بین x و x_0 قرار دارد.

اگر در سری تیلور (۱۱)، $x = 0$ انتخاب شود، داریم،

$$(12)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

که به آن سری ماک لورن می‌گوییم .

مثال ۴ . ۱۶ . سری ماک لورن تابع e^x را بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

حل .

$$f(x)=e^x \ , \ f'(x)=e^x \ , \ \dots , f^{(n)}(x)=e^x$$

و طبق فرمول (۱۲) داریم

$$e^x=f(0)+xf'(0)+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\dots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\dots$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \tag{۱۳}$$

و برای تعیین شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0$$

و $R=\infty$ ،یعنی به‌ازای جمیع مقادیر x ، همگرای باشد .

مثال ۴ . ۱۷ . سری ماک لورن تابع $\cos x$ را بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

حل . مشتقات متوالی تابع $f(x)=\cos x$ و مقادیر آنها را در $x=0$ پیدا می‌کنیم

$$f(x)=\cos x \ , \ f'(x)=-\sin x \ , \ f''(x)=-\cos x \ , \ \dots$$
$$f(0)=1 \ , \ f'(0)=0 \ , \ f''(0)=-1 \ , \ f'''(0)=0 \ , \ f^{(4)}(0)=1 \ , \dots$$

و با توجه به فرمول (۱۲) داریم

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots \tag{۱۴}$$

و برای تعیین شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right|=0 \Rightarrow R=\infty$$

و به‌ازای جمیع مقادیر x ، همگرا می‌باشد .

مثال ۴ . ۱۸ . سری ماک لورن تابع $\sin x$ را بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

حل .

$$f(x)=\sin x \ , \ f'(x)=\cos x \ , \ f''(x)=-\sin x \ , \dots$$
$$f(0)=0 \ , \ f'(0)=1 \ , \ f''(0)=0 \ , \ f'''(0)=-1 \ , \dots$$

و

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots \tag{۱۵}$$

و برای تعیین شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right|=0 \Rightarrow R=\infty$$

و به‌ازای جمیع مقادیر x ، همگرا می‌باشد .

مثال ۴ . ۱۹ . فرمول اولر

می‌دانیم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

حال اگر در فرمول فوق به‌جای x ، قرار دهیم ix ، داریم :

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}+\dots$$
$$=(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\dots)$$

و با توجه به بسط $\cos x$ و $\sin x$ ، داریم :

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{۱۶}$$

و اگر در فرمول (۱۶) به‌جای x ، قرار دهیم $-x$ ، داریم :

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x \tag{۱۷}$$

ذیلا" فرمول بسط ماک لورن چند تابع مهم را معرفی می‌کنیم .

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}x^m+\dots \tag{۱۸}$$

که به‌ازای جمیع مقادیر n و در فاصله همگرایی $(-a,a)$ درست است .

تذکر ۳. در فرمول (۱۸) اگر n عدد صحیح و مثبت باشد . بسط محدود بوده و با جمله x^n تمام می‌شود .

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \qquad , R = 1 \tag{۱۹}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots \qquad , R = 1 \tag{۲۰}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \qquad , R = 1 \tag{۲۱}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad , R = \infty \tag{۲۲}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad , R = \infty \tag{۲۳}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\,\frac{x^7}{7} + \dots \qquad , R = 1 \tag{۲۴}$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\frac{x^5}{5} + \dots\right) \qquad , R = 1 \tag{۲۵}$$

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots & , R = 1 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \dots & , \end{cases} \tag{۲۶}$$

اگر $x \geqslant 1$ و ـ اگر $x \leqslant -1$

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \qquad , R = 1 \tag{۲۷}$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \qquad , |x| > 1 \tag{۲۸}$$

مجموعه مسائل ۱۰۴

درمورد همگرایی سریهای زیر تحقیق کنید و درصورت همگرا بودن، شعاع همگرایی را بدست آورید .

۱ـ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} = 1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \dots$

۲ـ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, e^{nx} = 1 + e^x + 2!\, e^{2x} + \dots$

۳ـ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - + \dots$

۴ـ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots$

شعاع همگرایی سریهای زیر را بدست آورید .

۵ـ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

۶ـ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}\, x^n$

۷ـ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1}$

۸ـ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}\, x^n$

۹ـ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x+1)^n$

۱۰– بسط تیلور تابع $f(x)=Lnx$ را در نقطه $x=2$ بنویسید .

۱۱. بسط ماک لورن تابع $f(x)=Ln(1+x)$ را بنویسید .

۱۲– بسط ماک لورن تابع $f(x)=\sin^2 x$ را بنویسید .

۱۳– بسط ماک لورن تابع $f(x)=\cos^2 x$ را بنویسید .

۱۴– بسط تیلور تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ را در نقطه $x=1$ بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

۱۵– بسط تیلور تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $x=4$ بنویسید و شعاع همگرایی را تعیین کنید .

۴ . ۲ . حل معادلات دیفرانسیل به‌کمک سری توانی

در این بخش می‌خواهیم درمورد حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر صحبت کنیم . برای حل این معادلات ، جواب را به‌فرم سری توانی

$$(۱)\qquad y=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots$$

یا

$$(۲)\qquad y=\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots$$
$$c_n(x-a)^n+\dots$$

در نظر می‌گیریم . ابتدا باید تمام توابع موجود در معادلهٔ دیفرانسیل را به‌فرم سری توانی بنویسیم و سپس y و مشتقاتش را در معادلهٔ دیفرانسیل قرار دهیم و آنگاه با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، ضرایب سری توانی را بدست آوریم . قبل از آنکه بحث دیگری در این مورد داشته باشیم ، با ارائه چند مثال این روش را تشریح می‌کنیم

مثال ۴ . ۲۰ . معادله دیفرانسیل

$$y'-3xy=x\ ,\ y(0)=1 \qquad (۱)$$

حل . چون توابع موجود در این معادله یعنی x و $3x$ ـ چندجمله‌ای هستند و از طرفی هرچند جمله‌ای، خودبسط ماک لورن می‌باشد ، لذا لازم نیست که توابع را به‌فرم سری توانی بنویسیم . حال جواب معادله را به‌فرم

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (۲)$$

در نظر گرفته و y' را حساب می‌کنیم و در معادلهٔ (۱) به‌جای y و y' ، مقدار قرار می‌دهیم

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در (۱) داریم

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+(n+1)c_{n+1}x^n+\dots$$
$$-3c_0x-3c_1x^2-\dots-3c_{n-1}x^n+\dots=x$$

و با مساوی قرار دادن x های هم‌توان داریم

ضریب x^0 $\qquad c_1=0$

ضریب x $\qquad 2c_2-3c_0=1 \Rightarrow c_2=\dfrac{1}{2}(3c_0+1)$

ضریب x^2 $\qquad c_3=c_1=0$

. . . .

ضریب x^n $\qquad (۴)\qquad c_{n+1}=\dfrac{3}{n+1}c_{n-1}\ ,\ n\geq 2$

رابطه (۴) را رابطه *بازگشتی* می‌نامیم و با توجه به این رابطه، بقیه ضرایب تعیین می‌شوند

$$c_5=c_7=c_9=\dots=c_{2k+1}=0$$

یعنی تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند .

$$c_4=\frac{3}{4}c_2=\frac{3}{2\times 4}(3c_0+1)$$
$$c_6=\frac{3}{6}c_4=\frac{3^2}{2\times4\times6}(3c_0+1)$$

و

$$c_{2n}=\frac{3^{n-1}}{2^n n!}(3c_0+1)$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=c_0+(3c_0+1)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\times4}x^4+\frac{3^2}{2\times4\times6}x^6+\dots\right)$$

و با توجه به اینکه $y(0)=1$ ، پس $c_0=1$ و جواب خصوصی به‌فرم زیر است :

$$y=1+4\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\times4}x^4+\dots\right).$$

مثال ۴ . ۲۱ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'-3y=3 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل . جواب را به‌فرم سری توانی

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (2)$$

در نظر می‌گیریم و y' را حساب می‌کنیم

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots \qquad (3)$$

حال (۲) و (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم داریم :

$$c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+\dots+nc_nx^n+\dots$$
$$-3c_0-3c_1x-3c_2x^2-3c_3x^3-\dots-3c_nx^n-\dots=3$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان داریم

ضریب x^0 $\quad -3c_0=3\Rightarrow c_0=-1$

ضریب x $\quad c_1-3c_1=0\Rightarrow c_1=0$

ضریب x^2 $\quad 2c_2-3c_2=0\Rightarrow c_2=0$

ضریب x^3 $\quad 3c_3-3c_3=0\not\Rightarrow c_3=0$

یعنی رابطه بالا به‌ازای جمیع مقادیر c_3 برقرار است ، لذا c_3 به‌عنوان پارامتر مساله می‌ماند .

ضریب x^n $\quad (n-3)c_n=0$

پس تمام ضرایب c_4 ، c_5 و c_6 و ... صفر می‌باشند و جواب عمومی به‌فرم زیرمی‌باشد :

$$y=-1+cx^3$$

مثال ۴ . ۲۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'-(x+2)y=-2x^2-2x \qquad (1)$$

را حل کنید

حل . جواب را به‌فرم سری توانی

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (2)$$

در نظر می‌گیریم و y' را حساب می‌کنیم

$$y'=c_1+2c_2x+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots \qquad (3)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در (۱) ، داریم

$$c_1x+2c_2x^2+\dots+nc_nx^n+\dots$$
$$-c_0x-c_1x^2-\dots-c_{n-1}x^n-\dots$$
$$-2c_0-2c_1x-2c_2x^2-\dots-2c_nx^n-\dots=-2x^2-2x$$

ضرایب x های هم‌توان را مساوی قرار دهیم ، داریم

ضریب x^0 $\quad c_0=0$

ضریب x $\quad -c_1-c_0=-2\Rightarrow c_1=2$

ضریب x^2 $\quad (2-2)c_2-c_1=-2$

و رابطه بالا به‌ازای جمیع مقادیر c_2 درست می‌باشد و c_2 محاسبه نمی‌شود ، لذا c_2 به‌عنوان پارامتر مسئله می‌باشد .

ضریب x^n $\quad (n-2)c_n-c_{n-1}=0$

رابطه بازگشتی

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{n-2}\ ,\ n>2$$

$$c_3=\frac{c_2}{1}\ ,\ c_4=\frac{c_3}{2}=\frac{c_2}{1\times2}=\frac{c_2}{2!}$$

$$c_5=\frac{c_4}{3}=\frac{c_2}{3!}\ ,\dots,c_n=\frac{c_2}{(n-2)!}\ ,\ n>2$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=0+2x+c_2x^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\right)$$
$$=2x+c_2x^2e^x$$

توجه ۱. در مثالهای بالا شرط اولیه بهصورت $y(0)=y_0$ فرض شده بود و بههمین دلیل جواب را بهفرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ در نظر میگرفتیم. ولی اگر بخواهیم جواب را بهصورت سری توانی برحسب توانهای $x-a$ بنویسیم، یعنی اگر شرط اولیه بهصورت $y(a)=y_0$ باشد، در این صورت جواب را بهفرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ در نظر میگیریم. و با تغییر متغیر

$$X=x-a \quad , \quad dX=dx \quad , \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dX} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dX^2}$$

جواب بهفرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ میباشد و روش حل همان است که در مثالهای بالا ارائه شد و بعد از آنکه جواب عمومی برحسب X بدست آمد، بهجای X قرار میدهیم $x-a$

مثال ۴ . ۲۳ . جواب معادله دیفرانسیل

$$xy'-y=x \qquad (1)$$

را بهصورت سری توانی برحسب توانهای $x-1$ بدست آورید.

حل. با استفاده از تغییر متغیر

$$X=x-1 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dX} \qquad (2)$$

و جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$(X+1)\frac{dy}{dX}-y=X+1 \qquad (3)$$

حال جواب را بهفرم

$$y=c_0+c_1X+c_2X^2+\dots+c_nX^n+\dots \qquad (4)$$

در نظر میگیریم و $\frac{dy}{dX}$ را حساب میکنیم

$$\frac{dy}{dX}=c_1+2c_2X+\dots+nc_nX^{n-1}+\dots \qquad (5)$$

با جایگذاری (۴) و (۵) در (۳)، داریم:

$$c_1X+2c_2X^2+3c_3X^3+\dots+nc_nX^n+\dots$$

$$+c_1+2c_2X+3c_3X^2+4c_4X^3+\dots+(n+1)c_{n+1}X^n+\dots$$
$$-c_0-c_1X-c_2X^2-c_3X^3-\dots-c_nX^n-\dots=1+X$$

با مساوی قرار دادن ضرایب X های همتوان، داریم:

ضریب X^0 $\qquad c_1-c_0=1 \Rightarrow c_1=c_0+1$

ضریب X $\qquad c_1+2c_2-c_1=1 \Rightarrow c_2=\frac{1}{2}$

ضریب X^2 $\qquad 3c_3+c_2=0 \Rightarrow c_3=-\frac{c_2}{3}=-\frac{1}{6}$

ضریب X^n $\qquad (n+1)c_{n+1}+(n-1)c_n=0$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+1}=-\frac{n-1}{n+1}c_n \quad , \quad n\geqslant 2$$

$$c_4=-\frac{2}{4}c_3=\frac{1}{12}$$

$$c_5=-\frac{3}{5}c_4=-\frac{1}{20} \quad , \dots$$

و جواب عمومی بهفرم زیر میباشد:

$$y=c_0+(c_0+1)X+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{12}X^4-\frac{1}{20}X^5+\dots$$

و چون $X=x-1$

$$y=c_0x+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{12}-\frac{(x-1)^5}{20}+\dots$$

و اگر بخواهیم شعاع همگرایی را تعیین کنیم، با توجه به رابطه بازگشتی*

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n+1}\right|=1 \Rightarrow R=1$$

---

* شعاع همگرایی را همیشه از رابطه بازگشتی بدست میآوریم.

$$-1 < X < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 .$$

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل همیشه قابل نمایش به سری توانی می‌باشد؟ به مثال زیر توجه کنید!

مثال ۲۴.۴. آیا می‌توان جواب معادله زیر را به فرم سری توانی برحسب توانهای x نوشت؟

$$y' = \frac{1}{x} \qquad (۱)$$

حل. فرض می‌کنیم معادله دارای جوابی به‌فرم

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

باشد. y' را محاسبه می‌کنیم و در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots \qquad (۲)$$

(۲) را در (۱) قرار داده

$$x y' = 1$$

$$c_1 x + 2 c_2 x^2 + \cdots = 1$$

اگر ضرایب x های هم‌توان را مساوی قرار دهیم خواهیم داشت

ضریب x^0 $\qquad 1 = 0$ ↯

البته این معادله دارای جواب است زیرا

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y = Ln x + c$$

ولی این جواب قابل نمایش به‌فرم سری توانی برحسب قوای x نمی‌باشد.

اکنون به بررسی این مطلب می‌پردازیم که چه وقت یک معادلهٔ دیفرانسیل دارای جوابی است که قابل نمایش به‌فرم سری توانی می‌باشد. قضایای مربوطه را در مورد معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بیان می‌کنیم.

تعریف ۴. ۶. تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ **تحلیلی** نامیم، اگر $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R>0$ باشد.

قضیه ۴. ۱۰. اگر در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = p_3(x) \qquad (۳)$$

توابع $p_1(x)$ ، $p_2(x)$ و $p_3(x)$ هر سه در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب این معادله در نقطه $x=a$ تحلیلی خواهد بود.

همان‌طور که در مقدمه این فصل گفته شد، هدف اصلی در این فصل حل دو معادله بسیار مهم

معادله لژاندر $\qquad (1-x^2) y'' - 2xy' + m(m+1) y = 0$

معادله بسل $\qquad x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

می‌باشد. لذا قضیه زیر را که بسیار ضعیف‌تر از قضیه فوق بوده، ولی جوابگوی حل دو معادلهٔ لژاندر و بسل می‌باشد، بیان می‌کنیم.

تعریف ۴. ۷. در معادلهٔ دیفرانسیل

$$f_1(x) y'' + f_2(x) y' + f_3(x) y = 0$$

که در آن f_1، f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای برحسب x می‌باشند، نقطه $x=a$ را یک نقطه **معمولی** گوییم اگر $f_1(a) \neq 0$ باشد، در غیراینصورت نقطه $x=a$ را یک نقطه **منفرد** می‌نامیم.

قضیه ۴. ۱۱. اگر $x=a$ یک نقطه معمولی معادلهٔ دیفرانسیل

$$f_1(x) y'' + f_2(x) y' + f_3(x) y = 0 \qquad (۴)$$

باشد، آنگاه معادله دارای جوابی به‌فرم سری توانی برحسب توانهای $x-a$ خواهد بود و جواب عمومی را به‌فرم:

$$y = c\,(\text{یک سری توانی برحسب توانهای } x-a) \qquad (۵)$$
$$+ c^*(\text{یک سری توانی برحسب توانهای } x-a)$$

خواهیم داشت و هر دو سری مستقل خطی بوده و هر دو در یک ناحیه اطراف a همگرا خواهند بود.

تذکر ۱. در تمام مسائل، a را صفر اختیار می‌کنیم مگر آنکه مقدار دیگری برای آن داده شده باشد.

مثال ۴ . ۲۵ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-xy'+y=0 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل . با توجه به قضیه ۴ . ۱۱ . ضرایب y'' و y' و y سه چند جمله‌ای هستند و $f_1(0)=1\neq 0$. پس $x=0$ یک نقطه معمولی می‌باشد ، لذا معادله (۱) دارای جوابی بفرم سری توانی به‌فرم

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (2)$$

است ؛ y' و y'' را حساب می‌کنیم

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots \qquad (3)$$

$$y''=2c_2+3\times 2c_3x+\dots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\dots \qquad (4)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) و (۴) در (۱) داریم

$$2c_2+3\times 2c_3x+4\times 3c_4x^2+\dots+(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\dots$$
$$-c_1x-2c_2x^2-\dots-nc_nx^n-\dots$$
$$c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots=0$$

حال ضرایب x های هم‌توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم ، داریم :

ضریب x^0 $\qquad 2c_2+c_0=0 \Rightarrow c_2=-\dfrac{c_0}{2}$

ضریب x $\qquad 3\times 2c_3-c_1+c_1=0 \Rightarrow c_3=0$

رابطه بالا به‌ازای جمیع مقادیر c_1 برقرار است پس c_1 به‌عنوان پارامتر مساله می‌باشد

ضریب x^2 $\qquad 4\times 3c_4-c_2=0 \Rightarrow c_4=\dfrac{c_2}{4\times 3}=-\dfrac{c_0}{4!}$

....

ضریب x^n $\qquad (n+2)(n+1)c_{n+2}-(n-1)c_n=0$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2}=\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}c_n$$

وباتوجه‌به‌رابطه‌بازگشتی چون $c_3=0$ است پس‌کلیه‌ضرایب‌فرد صفر می‌باشد .

$$c_5=c_7=\dots=c_{2k+1}=0$$

$$c_6=\frac{3}{6\times 5}c_4=-\frac{3}{6!}c_0$$

$$c_8=\frac{5}{8\times 7}c_6=-\frac{15}{8!}c_0$$

و جواب عمومی را به‌فرم زیر خواهیم داشت :

$$y=c_0\left(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\frac{3}{6!}x^6-\frac{15}{8!}x^8-\dots\right)+c_1x$$

توجه کنید که در این مثال ، شعاع همگرایی هریک از سریها با توجه به رابطه بازگشتی بدست می‌آید .

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}\right|=0 \quad *$$

و $R=\infty$ ، لذا به‌ازای جمیع مقادیر x جواب درست می‌باشد .

مثال ۴ . ۲۶ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+2x^2y=0 \qquad (1)$$

را حل کنید .

حل . با توجه به قضیهٔ ۴ . ۱۱ ، داریم $f_1(0)=1\neq 0$ یعنی $x=0$ یک نقطه معمولی است و معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌فرم سری توانی می‌باشد .

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (2)$$

---

* دقت کنید که به‌جای $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ نوشته‌ایم $\dfrac{c_{n+2}}{c_n}$. علت آن است که در دستور دالامبر نسبت دو جمله متوالی نوشته می‌شود و در این مثال ، c_{n+2} و c_n دو جمله متوالی هریک از سریها می‌باشند .

$$y''=2c_2+3\times 2c_3x+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در (۱) داریم :

$$2c_2+3\times 2c_3x+4\times 3c_4x^2+5\times 4c_5x^3+\cdots+(n+4)(n+3)c_{n+4}x^{n+2}+\cdots$$
$$+2c_0x^2+2c_1x^3+\cdots+2c_nx^{n+2}+\cdots=0$$

ضرایب x های هم‌توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم ، داریم :

ضریب x^0 $\qquad c_2=0$

ضریب x $\qquad c_3=0$

ضریب x^2 $\qquad 12c_4+2c_0=0 \Rightarrow c_4=-\dfrac{c_0}{6}$

ضریب x^3 $\qquad 20c_5+2c_1=0 \Rightarrow c_5=-\dfrac{c_1}{10}$

. . . .

ضریب x^{n+2} $\qquad (n+4)(n+3)c_{n+4}+2c_n=0$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+4}=-\frac{2}{(n+4)(n+3)}c_n$$

با توجه به رابطه بازگشتی داریم

$$c_6=-\frac{2}{6\times 5}c_2=0$$

$$c_7=-\frac{2}{7\times 6}c_3=0$$

$$c_8=-\frac{2}{8\times 7}c_4=\frac{c_0}{168}$$

$$c_9=-\frac{2}{9\times 8}c_5=\frac{c_1}{360}$$

و به‌همین ترتیب بقیه ضرایب محاسبه می‌شوند و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y=c_0\left(1-\frac{x^4}{6}+\frac{x^8}{168}-\cdots\right)+c_1\left(x-\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{360}-\cdots\right)$$

و با توجه به رابطه بازگشتی ، شعاع همگرایی هریک از سریهای جواب عمومی

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+4}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{(n+4)(n+3)}\right|=0$$

و $R=\infty$ می‌باشد

مثال ۴ . ۲۷ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . با توجه به قضیهٔ ۴ . ۱۱ ، داریم $f_1(0)=(1-0)=1\neq 0$ ، لذا $x=0$ یک نقطه معمولی است و معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌فرم سری توانی می‌باشد ، و داریم :

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$
$$y'=c_1+2c_2x+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots$$
$$y''=2c_2+3\times 2c_3x+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots$$

با جایگذاری y ، y' ، y'' در (۱) داریم :

$$2c_2+3\times 2c_3x+4\times 3c_4x^2+\cdots+(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\cdots$$
$$-2c_2x^2-\cdots-n(n-1)c_nx^n-\cdots$$
$$-2c_1x-2\times 2c_2x^2-\cdots-2nc_nx^n-\cdots$$
$$2c_0+2c_1x+2c_2x^2+\cdots+2c_nx^n+\cdots=0$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب x های هم‌توان ، داریم :

ضریب x^0 $\qquad c_2+c_0=0 \Rightarrow c_2=-c_0$

ضریب x $\qquad 6c_3-2c_1+2c_1=0 \Rightarrow c_3=0$

و رابطه بالا به‌ازای جمیع مقادیر c_1 برقرار می‌باشد ، لذا c_1 بعنوان پارامتر مساله است

ضریب x^2 $\qquad 12c_4-4c_2=0 \Rightarrow c_4=\dfrac{c_2}{3}=-\dfrac{c_0}{3}$

. . . .

ضریب x^n $\qquad (n+2)(n+1)c_{n+2}-(n-1)(n+2)c_n=0$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = \frac{(n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}\, c_n$$

و باتوجه به رابطه بازگشتی، چون $c_3 = 0$ است پس تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند و

$$c_6 = \frac{3}{5}\, c_4 = -\frac{c_0}{5}$$

$$c_8 = \frac{5}{7}\, c_6 = -\frac{c_0}{7}$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر خواهد بود:

$$y = c_0\left(1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \frac{x^7}{7} - \dots\right) + c_1 x$$

و شعاع همگرایی با توجه به رابطه بازگشتی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n-1}{n+1} \right| = 1$$

$R = 1$ می‌باشد.

برای پیدا کردن جواب معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم سری توانی، می‌توان از روش زیر که به‌روش **لیبنتیز ـ ماک لورن*** موسوم است و به آن روش **مشتقات متوالی** می‌گوییم استفاده نمود بخصوص وقتی‌که معادله با شرایط اولیه داده شده باشد. در این روش جواب را به‌فرم

$$y = y(a) + \frac{(x-a)}{1!}\, y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\, y''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}\, y^{(n)}(a) + \dots \qquad (۶)$$

در نظر می‌گیریم

مثال ۴ . ۲۸ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1-x^2)y'' - 5xy' - 3y = 0 \;,\; y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 1 \qquad (۱)$$

* *Leibnitz – Maclaurin*

را حل کنید.

حل. با توجه به شرایط اولیه

$$(1-0)y''(0) - 0 - 3y(0) = 0 \;\Rightarrow\; y''(0) = 3 \qquad (۲)$$

با مشتقگیری از (۱) داریم:

$$-2xy'' + (1-x^2)y''' - 5y' - 5xy'' - 3y' = 0 \qquad (۳)$$

برای محاسبه $y'''(0)$ در (۳) مقدار می‌گذاریم.

$$y'''(0) - 5 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; y'''(0) = 8$$

و مشتق مرتبه n ام را حساب می‌کنیم (طبق فرمول لیبنیتز) داریم:

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - x(2n+5)y^{(n+1)} - (n+1)(n+3)y^{(n)} = 0 \qquad (۴)$$

و

$$y^{(4)}(0) - 15y^{(2)}(0) = 0 \;\Rightarrow\; y^{(4)}(0) = 45$$

$$y^{(5)}(0) - 24y^{(3)}(0) = 0 \;\Rightarrow\; y^{(5)}(0) = 192$$

و به‌همین ترتیب بقیه ضرایب را حساب می‌کنیم. جواب معادله (۱) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}\, y''(0) + \frac{x^3}{3!}\, y'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}\, y^{(n)}(0) + \cdots$$

$$y = 1 + x + \frac{3}{2!}\, x^2 + \frac{8}{3!}\, x^3 + \frac{45}{4!}\, x^4 + \frac{192}{5!}\, x^5 + \dots$$

مثال ۴ . ۲۹ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' = yy' - x^2 \;,\; y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 1 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل.

$$y''(0) = y(0)y'(0) - 0$$

$$y''(0) = 1 \qquad (۲)$$

با مشتقگیری از (۱) داریم

$$y''' = (y')^2 + yy'' - 2x$$

$$y'''(0) = 1 + 1 = 2 \qquad (۳)$$

با مشتقگیری از (۳) داریم

$$y^{(4)} = 3y'y'' + yy''' - 2 \qquad (۴)$$

$$y^{(4)}(0) = 3+2-2 = 3$$

و بسط ماک لورن جواب تا جمله چهارم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 + \cdots$$

مثال ۴.۳۰. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + y'\sin x + e^x y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل.

$$y''(0)+y(0)=0 \Rightarrow y''(0) = -y(0)$$

با مشتقگیری از (۱) داریم :

$$y''' + y''\sin x + y'\cos x + e^x y + e^x y' = 0 \qquad (۲)$$

$$y'''(0)+2y'(0)+y(0)=0 \Rightarrow y'''(0) = -2y'(0)-y(0)$$

و با مشتقگیری از (۲) داریم

$$y^{(4)} + y'''\sin x + 2y''\cos x - y'\sin x + e^x y + 2e^x y' + e^x y'' = 0 \qquad (۳)$$

$$y^{(4)}(0)+3y''(0)+y(0)+2y'(0)=0$$

$$y^{(4)}(0) = 2y(0) - 2y'(0)$$

و به‌همین ترتیب عمل مشتقگیری را ادامه می‌دهیم و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \frac{x^4}{4!}y^{(4)}(0) + \cdots$$

$$= y(0) + xy'(0) - \frac{x^2}{2}y(0) + \frac{x^3}{6}(-2y'(0) - y(0)) +$$

$$\frac{x^4}{24}(2y(0) - 2y'(0)) + \cdots$$

$$y = y(0)(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \cdots) + y'(0)(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \cdots)$$

مجموعه مسائل ۴.۲

جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را به‌فرم سری توانی برحسب توانهای تا جمله k ام بنویسید .

۱. $y'' - xy' + 2y = 0 \quad , \quad K = 7 \quad , \quad a = 0$

۲. $2(x^2+8)y'' + 2xy' + (x+2)y = 0 \quad , \quad k = 4 \quad , \quad a = 0$

۳. $y'' - xy' - y = \sin x \quad , \quad k = 5 \quad , \quad a = 0$

۴. $xy'' + x^2y' - 2y = 0 \quad , \quad k = 4 \quad , \quad a = 1$

۵. $y'' - xy' - y = 0 \quad , \quad k = 4 \quad , \quad a = 1$

۶. $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \quad , \quad k = 4 \quad , \quad a = 0$

۷. $y'' - xy' + x^2y = 0 \quad , \quad k = 4 \quad , \quad a = 0$

۸. $y'' + x^2y = 1 + x + x^2 \quad , \quad k = 8 \quad , \quad a = 0$

۹. $y'' + 2x^2y = 0 \quad , \quad k = 3 \quad , \quad a = 0$

۱۰. $y' = Ln\, xy \quad , \quad k = 5 \quad , \quad y(1) = 1$

۱۱. $y' = \cos x + \sin y \quad , \quad k = 5 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

۱۲. $y'' - y = \sin x \quad , \quad k = 7 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$

۱۳. $y'' - 2y = e^{2x} \quad , \quad k = 7 \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 2$

۱۴. $y''+2yy'=0\ ,\ k=7\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

۱۵. $y''=\sin xy\ ,\ k=5\ ,\ y(\frac{\pi}{2})=1\ ,\ y'(\frac{\pi}{2})=1$

۱۶. $y''=\cos xy\ ,\ k=5\ ,\ y(\frac{\pi}{2})=1\ ,\ y'(\frac{\pi}{2})=1$

۴ . ۳ . معادلهٔ لژاندر . چندجمله‌ایهای لژاندر

معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1-x^2)y''-2xy'+v(v+1)y=0 \qquad (۱)$$

که در آن v عددی حقیقی می‌باشد، در مسائل فیزیکی، بخصوص در مسائل با مقدار مرزی مربوط به کره و مربوط به توزیع حرارت در هادی کروی شکل مطرح می‌شود.

معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (۱) در شرایط قضیهٔ ۴ . ۱۱ . صدق می‌کند و $x=0$ یک نقطه معمولی است، لذا معادله دارای جوابی به‌فرم

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (۲)$$

می‌باشد. حال مشتق اول و دوم y را می‌گیریم و در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم و ضرایب c_i را بدست می‌آوریم

$$2c_2+3\times 2c_3x+4\times 3c_4x^2+\dots+(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\dots$$
$$-2c_2x^2-\dots-n(n-1)c_nx^n-\dots$$
$$-2c_1x-2\times 2c_2x^2-\dots-2nc_nx^n-\dots$$
$$v(v+1)c_0+v(v+1)c_1x+v(v+1)c_2x^2+\dots+v(v+1)c_nx^n+\dots=0$$

ضرایب x های هم‌توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا c_i ها پیدا شوند

ضریب x^0 $\qquad c_2=-\frac{v(v+1)}{2}c_0$

ضریب x $\qquad c_3=-\frac{(v-1)(v+2)}{3!}c_1$

. . . .

ضریب x^n $\qquad (n+2)(n+1)c_{n+2}+[-n(n-1)-2n+v(v+1)]c_n=0$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+[v^2-n^2+v-n]c_n=0$$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2}=-\frac{(v-n)(v+n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n\ ,\ n\geqslant 0 \qquad (۳)$$

با توجه به رابطه بازگشتی، تمام ضرایب فرد برحسب c_1 و تمام ضرایب زوج برحسب c_0 محاسبه می‌شوند و c_0 و c_1 ثابتهای دلخواه هستند. و داریم:

$$c_4=-\frac{(v-2)(v+3)}{4\times 3}c_2=\frac{(v-2)v(v+1)(v+3)}{4!}c_0$$

$$c_5=-\frac{(v-3)(v+4)}{5\times 4}c_3=\frac{(v-3)(v-1)(v+2)(v+4)}{5!}c_1$$

و به‌همین ترتیب بقیه ضرایب محاسبه می‌شوند. با جایگذاری این ضرایب در (۳) داریم:

$$y=c_0\left(1-\frac{v(v+1)}{2!}x^2+\frac{(v-2)v(v+1)(v+3)}{4!}x^4-+\dots\right)$$
$$+c_1\left(x-\frac{(v-1)(v+2)}{3!}x^3+\frac{(v-3)(v-1)(v+2)(v+4)}{5!}x^5-+\dots\right) \qquad (۴)$$

و ملاحظه می‌شود که جواب عمومی به‌فرم

$$y(x)=c_0R_v(x)+c_1S_v(x) \qquad (۵)$$

می‌باشد و $R_v(x)$ و $S_v(x)$ دو جواب مستقل خطی هستند، و باتوجه به (۳) داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(v-n)(v+n+1)}{(n+2)(n+1)}\right|$$
$$=1$$

یعنی سریهای $R_v(x)$ و $S_v(x)$ به‌ازای $|x|<1$ همگرا می‌باشند.

در اغلب مسائل کاربردی، پارامتر v یک عدد درست نامنفی می‌باشد. حال بررسی خود را در حالتی که $v=n$ (n عدد درست نامنفی) ادامه می‌دهیم. در این صورت با توجه به رابطه بازگشتی داریم:

$$c_{n+2}=c_{n+4}=\dots=0$$

در نتیجه، هنگامی‌که n زوج باشد، سری $R_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n خواهد بود و $S_n(x)$ به‌صورت یک سری می‌باشد و هنگامی‌که n فرد باشد، سری $S_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و $R_n(x)$ به‌صورت یک سری خواهد بود، پس برای هر n

درست نامنفی، $R_n(x)$ یا $S_n(x)$ (نه هر دو) یک چندجمله‌ای از درجه n می‌باشد. این چندجمله‌ایها را که در مقادیر ثابتی ضرب شده‌اند **چندجمله‌ایهای لژاندر** می‌نامیم. به‌علت اهمیت بسیار زیاد این چندجمله‌ایها، در زیر به‌تفصیل به بررسی آنها می‌پردازیم. ابتدا رابطه بازگشتی (۳) را به‌فرم

$$c_n = -\frac{(n+2)(n+1)}{(\nu-n)(\nu+n+1)}\, c_{n+2}\,, \quad n \leqslant \nu-2 \qquad (۶)$$

می‌نویسیم و سپس تمام ضرایب غیرصفر را برحسب c_ν (ضریب بزرگترین توان x در چند جمله‌ای) بدست می‌آوریم (در این حالت ν یک عدد درست غیرمنفی است). در این صورت ضریب c_ν ثابت دلخواه می‌باشد و مرسوم است که $c_0 = 1$ انتخاب می‌شود و

$$c_\nu = \frac{(2\nu)!}{2^\nu(\nu!)^2} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\nu-1)}{\nu!} \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۷)$$

تذکر ۱. با انتخاب این مقدار برای c_ν، تمام چندجمله‌ایها به‌ازای $x=1$ برابر ۱ می‌شوند.

حال با توجه به (۶) داریم:

$$c_{\nu-2} = -\frac{\nu(\nu-1)}{2(2\nu-1)}\, c_\nu = -\frac{\nu(\nu-1)(2\nu)!}{2(2\nu-1)2^\nu(\nu!)^2}$$

$$= -\frac{\nu(\nu-1)(2\nu)(2\nu-1)(2\nu-2)!}{2(2\nu-1)2^\nu\,\nu(\nu-1)!\,\nu(\nu-1)(\nu-2)!}$$

$$= -\frac{(2\nu-2)!}{2^n(\nu-1)!(\nu-2)!}$$

و به‌طریق مشابه داریم

$$c_{\nu-4} = -\frac{(\nu-2)(\nu-3)}{4(2\nu-3)}\, c_{\nu-2}$$

$$= \frac{(2\nu-4)!}{2^\nu\, 2!(\nu-2)!(\nu-4)!}$$

و در حالت کلی، برای $\nu-2k \geqslant 0$ داریم

$$(۸) \quad c_{\nu-2k} = (-1)^k \frac{(2\nu-2k)!}{2^\nu k!(\nu-k)!(\nu-2k)!}$$

و با فرض اینکه ν یک عدد درست نامنفی مانند n می‌باشد. جواب بدست آمده از معادلهٔ لژاندر را **چندجمله‌ای لژاندر** از درجه n می‌نامیم و آنرا با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم و با توجه به ضرایب بدست آمده در (۸) داریم:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\, x^{n-2k} \qquad (۹)$$

و با توجه به فرمول (۹) داریم:

$$P_0(x) = 1$$

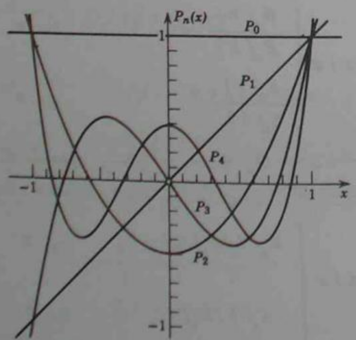
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



شکل ۱۰۴

پس جواب عمومی یک معادلهٔ لژاندر با $\nu = n$ به‌صورت زیر است:

$$y = a_1 P_n(x) + a_2 Q_n(x) \qquad (۱۰)$$

که در آن $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n می‌باشد که با فرمول (۹) محاسبه می‌شود و $Q_n(x)$ یک سری نامحدود می‌باشد و $P_n(x)$ ها را چندجمله‌ای‌های لژاندر و $Q_n(x)$ ها را توابع لژاندر نوع دوم می‌نامیم و فاصله همگرایی $P_n(x)$، $[-1,1]$ و فاصله همگرایی $Q_n(x)$، $(-1,1)$ می‌باشد.

توجه ۱. جواب عمومی معادلهٔ لژاندر با ν دلخواه که با فرمول (۴) بیان شد در حالت کلی به‌فرم

$$y(x)=c_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2).(\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}\right]$$
$$+c_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1).(\nu+2)(\nu+4)\ldots(\nu+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right] \qquad (۱۱)$$
$$=c_0R_\nu(x)+c_1S_\nu(x)$$

می‌باشد و وقتی‌که $\nu=n$ (n عدد درست نامنفی) باشد، $R_\nu(x)$ یا $S_\nu(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n هستند و همان‌طور که قبلاً بیان شد این چندجمله‌ایها را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم و می‌توان آنها را از رابطه زیر نیز بدست آورد:

$$P_n(x)=\begin{cases}\dfrac{R_n(x)}{R_n(1)}, & n \text{ زوج}\\[2ex] \dfrac{S_n(x)}{S_n(1)}, & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad (۱۲)$$

و سری دیگر را که نامحدود است و آنرا با $Q_n(x)$ نشان دادیم، می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$Q_n(x)=\begin{cases}R_n(1)S_n(x), & n \text{ زوج}\\[2ex] -S_n(1)R_n(x), & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad (۱۳)$$

مثال ۴.۳۱. با استفاده از (۱۲)، $P_2(x)$ و $P_3(x)$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا $R_2(x)$ و $S_3(x)$ را با توجه به (۱۱) محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه

$R_2(x)$ می‌دانیم که سری اول (۱۱) فقط شامل دو جمله‌ای باشد. لذا

$$R_2(x)=1+(-1)^1\frac{2\times3}{2!}x^2=1-3x^2$$

و برای محاسبه $S_3(1)$ از سری دوم فرمول (۱۱) داریم

$$S_3(x)=x+(-1)^1\frac{2\times5}{3!}x^3=x-\frac{5}{3}x^3$$

و

$$R_2(1)=1-3=-2\ ,\ S_3(1)=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$$

و با توجه به (۱۲) داریم

$$P_2(x)=\frac{R_2(x)}{R_2(1)}=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{S_3(x)}{S_3(1)}=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

مثال ۴.۳۲. با استفاده از (۱۳)، $Q_0(x)$ و $Q_1(x)$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا $R_0(1)$ و $S_0(x)$ و $R_1(x)$ و $S_1(1)$ را محاسبه می‌کنیم

$$R_0(1)=1$$

$$S_0(x)=x+\frac{1\times2}{3!}x^3+\frac{1\times3\times2\times4}{5!}x^5+\frac{1\times3\times5\times2\times4\times6}{7!}x^7+\ldots$$
$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$$S_1(1)=1$$

$$R_1(x)=1-\frac{1\times2}{2!}x^2+\frac{1\times(-1)\times2\times4}{4!}x^4-\frac{1\times(-1)(-3)\times2\times4\times6}{6!}x^6+-\ldots$$

و با توجه به (۱۳) داریم:

$$Q_0(x)=R_0(1)S_0(x)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

و

$$Q_1(x) = -S_1(1)R_1(x)$$

$$= -1 + x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = \frac{x}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

چندجمله‌ایهای لژاندر را می‌توان با استفاده از روابط و فرمولهایی که ذیلاً معرفی می‌شوند محاسبه نمود

الف : فرمول ردریگس*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad (۱۴)$$

اثبات می‌دانیم

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}$$

بنابراین

$$(a) \qquad (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

از طرفی

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = (2n-2k)(2n-2k-1)\dots(n-2k+1)x^{n-2k} \quad , \quad 2k \leqslant n$$

$$= 0 \quad , \quad n < 2k$$

رابطه بالا را می‌توان به‌فرم زیر نوشت

$$(b) \qquad \frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \quad , \quad 2k \leqslant n$$

$$= 0 \quad , \quad n < 2k$$

* Rodrigue's Formula

با توجه به (a) و (b)

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

و با توجه به فرمول (۹)

$$= P_n(x)$$

مثال ۴ . ۳۳. با استفاده از فرمول (۱۴)، $P_2(x)$ را حساب کنید.

حل.

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)^2$$

$$= \frac{1}{8}(12x^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

ب. تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر

چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$، ضرایب t^n در بسط ماک لورن $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ می‌باشند، یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \qquad (۱۵)$$

اثبات. می‌دانیم

$$(a) \quad (1+z)^k = 1 + kz + \frac{k(k-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

از طرفی

$$\frac{}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = [1+t(-2x+t)]^{-1/2}$$

حال با توجه به (a) و فرض اینکه $k = -\frac{1}{2}$ و $z = t(-2x+t)$ ، داریم :

$$[1+t(-2x+t)]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2}t^2(2x-t)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n-1)}{2^n\, n!}t^n(2x-t)^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2xt-t^2) + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2}(4x^2t^2 - 4xt^3 + t^4) + \cdots$$

و $P_0(x)$ برابر است با ضریب t^0 یعنی $P_0(x) = 1$
و $P_1(x)$ برابر است با ضریب t یعنی $P_1(x) = x$
و $P_2(x)$ برابر است با ضریب t^2 یعنی $x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$
و بطور کلی ضریب t^n به‌فرم زیر می‌باشد :

$$(16)\quad \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - + \ldots\right]$$

مثال ۴ . ۳۴. با استفاده از فرمول (۱۶) ، $P_3(x)$ را حساب کنید .

حل .

$$P_3(x) = \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}\left[x^3 - \frac{3(3-1)}{2(6-1)}x\right]$$
$$= \frac{5}{2}\left[x^3 - \frac{3}{5}x\right]$$
$$= \frac{1}{2}[5x^3 - 3x]$$

مثال ۴ . ۳۵. مطلوبست $P_n(1)$

حل . با استفاده از فرمول (۱۵) به‌ازای $x = 1$ ، داریم :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \ , \ |t|<1$$

در نتیجه برای هر n داریم $P_n(1) = 1$

مثال ۴ . ۳۶. مطلوبست $P_n(-1)$

حل . با استفاده از فرمول (۱۵) به‌ازای $x = -1$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \ , \ |t|<1$$

در نتیجه برای هر n داریم $P_n(-1) = (-1)^n$

مثال ۴ . ۳۷. مطلوبست $P_n(0)$

حل . با استفاده از فرمول (۱۵) به‌ازای $x = 0$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n$$

از طرفی

$$(1+t^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}t^4 + \cdots + (-1)^n\frac{1 \times 3 \times \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots (2n)}t^{2n} + \ldots, |t|<1$$

در نتیجه

$$P_{2n-1}(0) = 0$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{1 \times 3 \times \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots (2n)}$$

ب . روابط بازگشتی

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad , \; n \geqslant 1 \tag{۱۷}$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x) \quad , \; n \geqslant 1 \tag{۱۸}$$

$$(x^2 - 1) P'_n(x) = n x P_n(x) - n P_{n-1}(x) \quad , \; n \geqslant 1 \tag{۱۹}$$

$$n P_n(x) + P'_{n-1}(x) - x P'_n(x) = 0 \quad , \; n \geqslant 1 \tag{۲۰}$$

$$P'_{n+1}(x) = x P'_n(x) + (n+1) P_n(x) \quad , \; n \geqslant 0 \tag{۲۱}$$

اثبات فرمول (۱۷) .

می‌دانیم

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به t مشتق می‌گیریم .

$$\frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n-1}$$

طرفین را در $1 - 2xt + t^2$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{x - t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2xt + t^2)\, n P_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - t) P_n(x)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2xt + t^2)\, n P_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x)\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nx P_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n+1}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب t های هم‌توان داریم :

$$x P_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1) P_{n+1}(x) - 2nx P_n(x) + (n-1) P_{n-1}(x)$$

و

$$P_{n+1}(x) = \frac{1+2n}{1+n}\, x P_n(x) - \frac{n}{1+n} P_{n-1}(x) \quad , \; n \geqslant 1$$

اثبات فرمول ۲۰ . از طرفین فرمول (۱۷) نسبت به x مشتق می‌گیریم .

$$(a) \quad P'_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} P_n(x) + \frac{2n+1}{n+1}\, x P'_n(x) - \frac{n}{n+1} P'_{n-1}(x)$$

حال از طرفین فرمول (۱۵) نسبت به x مشتق می‌گیریم ، داریم

$$\frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, t^n$$

طرفین رابطه بالا را در $(1 - 2xt + t^2)$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2xt + t^2) P'_n(x)\, t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x P'_n(x)\, t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, t^{n+2}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب t های هم توان داریم :

$$(b) \quad P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2x P'_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

یا

$$(c) \quad P'_{n+1}(x) = P_n(x) + 2x P'_n(x) - P'_{n-1}(x)$$

با توجه به روابط (a) و (c) داریم

$$\left(\frac{2n+1}{n+1} - 1\right) P_n(x) + \left(\frac{2n+1}{n+1} - 2\right) x P'_n(x) - \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) P'_{n-1}(x) = 0$$

$$n P_n(x) - x P'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0 .$$

اثبات فرمول (۱۸) . از فرمول (b) داریم :

$$(d) \quad 2x P'_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x)$$

و از فرمول (a) داریم :

$$(e) \quad x P'_n(x) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) P'_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P'_{n-1}(x) - P_n(x)$$

با توجه به (d) و (e) داریم :

$$\left(\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right)P'_{n+1}(x)+\left(\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right)P'_{n-1}(x)-\frac{1}{2}P_n(x)=0$$

$$\frac{1}{2(2n+1)}P'_{n+1}(x)-\frac{1}{2(2n+1)}P'_{n-1}(x)=\frac{1}{2}P_n(x)$$

یا

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x).$$

اثبات بقیه روابط به‌طریق مشابه می‌باشد .

مثال ۴ . ۳۸. با توجه به اینکه می‌دانیم $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ ، با استفاده از فرمول (۱۷) ، $P_3(x)$ را حساب کنید .

حل . ابتدا به‌ازای $n=1$ ، $P_2(x)$ را حساب کرده ،

$$P_2(x)=\frac{3}{2}xP_1(x)-\frac{1}{2}P_0(x)$$

$$=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

حال به‌ازای $n=2$ ، $P_3(x)$ را حساب می‌کنیم

$$P_3(x)=\frac{5}{3}xP_2(x)-\frac{2}{3}P_1(x)$$

$$=\frac{5}{3}x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}x$$

$$=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

مثال ۴ . ۳۹. با استفاده از فرمول (۱۸) ، $P_3(x)$ را حساب کنید .

حل . ابتدا به‌ازای $n=1$ ، $P'_2(x)$ را حساب می‌کنیم

$$P_0(x)=1\quad,\quad P'_0(x)=0$$

$$P'_2(x)-0=3P_1(x)$$

$$P'_2(x)=3x$$

و با انتگرالگیری داریم

$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2+C$$

از طرفی می‌دانیم برای هر عدد درست نامنفی $P_n(1)=1$ ، پس

$$P_2(1)=\frac{3}{2}+C=1\quad,\quad C=\frac{-1}{2}$$

و

$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

حال به‌ازای $n=2$ ، $P'_3(x)$ را حساب می‌کنیم

$$P_1(x)=x\quad,\quad P'_1(x)=1$$

$$P'_3(x)-P'_1(x)=5P_2(x)$$

$$P'_3(x)=\frac{15}{2}x^2-\frac{3}{2}$$

و

$$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x+C$$

و با توجه به مثال ۴ . ۳۷، می‌دانیم $P_{2n-1}(0)=0$

$$P_3(0)=C=0$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

مثال ۴ . ۴۰. نشان دهید

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$$

حل . می‌دانیم

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

با توجه به فرمول بالا

$$P_n(-x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n\, k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} (-x)^n (-x)^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n\, k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} \cdot (-1)^n x^{n-2k}$$

$$= (-1)^n P_n(x).$$

تذکر ۲. در مثال ۴. ۴۰ نشان دادیم که

$$(۲۲) \qquad P_{2n}(-x) = P_{2n}(x) \ , \quad P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$$

یعنی $P_n(x)$ برای n های زوج، یک تابع زوج و برای n های فرد، یک تابع فرد می‌باشد.

تعریف ۴. ۸. یک مجموعه از توابع f_1 و f_2 و f_3 و ... را در فاصله $[a, b]$ **متعامد** گوییم، اگر برای هر دو تابع متفاوت از این مجموعه داشته باشیم

$$\int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر

مجموعهٔ چندجمله‌ایهای لژاندر در فاصله $[-1 \ , \ 1]$ متعامد هستند، یعنی

$$(۲۳) \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

اثبات می‌دانیم $P_m(x)$ و $P_n(x)$ جوابهای معادله لژاندر با $\nu = m$ و $\nu = n$ می‌باشند پس داریم

$$(a) \qquad (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$(b) \qquad (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

با ضرب معادلهٔ (a) در $P_n(x)$ و معادلهٔ (b) در $P_m(x)$ داریم

$$(1-x^2)P_n(x)P_m''(x) - 2xP_n(x)P_m'(x) + m(m+1)P_n(x)P_m(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_m(x)P_n''(x) - 2xP_m(x)P_n'(x) + n(n+1)P_m(x)P_n(x) = 0$$

با کم کردن در معادله فوق از یکدیگر داریم:

$$(c) \quad (1-x^2)[P_n(x)P_m''(x) - P_m(x)P_n''(x)] - 2x[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)]$$
$$= [n(n+1) - m(m+1)]\, P_m(x)P_n(x)]$$

رابطه (c) را می‌توان به‌فرم زیر نوشت

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)] - 2x[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)]$$
$$= [n(n+1) - m(m+1) P_m(x) P_n(x)$$

و یا

$$(d) \quad \frac{d}{dx}(1-x^2)[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)] = [n(n+1) - m(m+1)]\, P_m(x)P_n(x)$$

و با انتگرالگیری از طرفین رابطه (d) داریم

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = (1-x^2)P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)]\Big|_{-1}^{1} = 0$$

و چون $m \neq n$ می‌باشد، بنابراین

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \ , \quad m \neq n$$

مثال ۴. ۴۱. نشان دهید.

$$(۲۴) \qquad \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

حل. با استفاده از تابع مولد داریم:

$$(a) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

و

$$(b) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)\, t^m$$

با ضرب (a) در (b) داریم

$$(c) \qquad \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)\, t^{m+n}$$

با انتگرالگیری از طرفین (c) از ۱- تا ۱ داریم

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2}dx = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx\right) t^{m+n}$$

و با توجه به رابطه (۲۳) داریم

$$-\frac{1}{2t}Ln(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\right)t^{2n}$$

و

$$-\frac{1}{2t}[Ln(1-t)^2-Ln(1+t)^2]=\frac{1}{t}Ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}$$

پس

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\right)t^{2n}$$

و در نتیجه

$$\frac{2}{2n+1}=\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\ ,\ \forall\ n\in N.$$

قضیه ۴ . ۱۲. اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دیرکله* صدق کند، آنگاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ ، در فاصله $-1<x<1$ داریم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x) \qquad (۲۵)$$

که

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx \qquad (۲۶)$$

و در هر نقطه ناپیوستگی سری بالا، به $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ همگرا می‌باشد.

مثال ۴ . ۴۲. چندجمله‌ای

$$f(x)=5x^3-3x^2-x-1 \qquad (۱)$$

را برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر بیان کنید.

---

* *Dirichlet*

حل. چون چندجمله‌ای (۱) از درجه ۳ می‌باشد، لذا

$$5x^3-3x^2-x-1=C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+C_3P_3(x)$$

روش اول: با استفاده از فرمول (۲۶) داریم

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)(1)dx$$
$$=\frac{1}{2}(-2-2)=-2$$
$$C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)(x)dx$$
$$=\frac{3}{2}\left(2-\frac{2}{3}\right)=2$$
$$C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\frac{5}{2}\left(-\frac{9}{5}+1\right)=-2$$
$$C_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}(5x^3-3x^2-x-1)\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)dx$$
$$=2$$

در نتیجه

$$5x^3-3x^2-x-1=2(-P_0(x)+P_1(x)-P_2(x)+P_3(x))$$

مثال ۴ . ۴۳. چندجمله‌ای

$$f(x)=x^4 \qquad (۱)$$

را برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر بیان کنید.

حل. چون چندجمله‌ای (۱) از درجه ۴ می‌باشد، لذا

$$x^4=C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+C_3P_3(x)+C_4P_4(x)$$

روش دوم:

$$x^4=C_0+C_1x+C_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+C_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)$$
$$+C_4\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان داریم

ضریب x^4 $\qquad \frac{35}{8}C_4 = 1 \ , \quad C_4 = \frac{8}{35}$

ضریب x^3 $\qquad \frac{5}{2}C_3 = 0 \ , \quad C_3 = 0$

ضریب x^2 $\qquad \frac{3}{2}C_2 - \frac{30}{8}C_4 = 0 \ , \quad C_2 = \frac{4}{7}$

ضریب x $\qquad C_1 - \frac{3}{2}C_3 = 0 \ , \quad C_1 = 0$

ضریب x^0 $\qquad C_0 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{3}{8}C_4 = 0 \ , \quad C_0 = \frac{1}{5}$

پس

$$x^4 = \frac{1}{5}P_0(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{8}{35}P_4(x)$$

مثال ۴ . ۴۴ . چندجمله‌ٔ اول بسط $f(x)$ را برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر، بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leqslant 0 \\ x & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

حل. با توجه به قضیه ۴. ۱۲، داریم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[\int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x(1)\,dx]$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$C_1 = \frac{3}{2}[\int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x(x)\,dx]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{5}{2}[\int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})\,dx$$

$$= \frac{5}{16}$$

. . . .

و

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \cdots$$

توجه ۲ . قبلاً بیان کردیم که جواب عمومی معادلهٔ لژاندر با $v=n$ که n عدد درست نامنفی باشد به‌فرم زیر خواهد بود.

$$y = a_1 P_n(x) + a_2 Q_n(x)$$

و $Q_n(x)$ را که توابع لژاندر نوع دوم نامیده می‌شود، توسط فرمول (۱۳) بیان نمودیم. حال برای سادگی در محاسبات، فرمول زیر را برای تعیین $Q_n(x)$ معرفی می‌کنیم.

برای n زوج

$$(۲۷) \qquad Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2}\, 2^n [(\frac{n}{2})!]^2}{n!}[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots]$$

و برای n فرد

$$(۲۸) \qquad Q_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2^{n-1}[(\frac{n-1}{2})!]^2}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times n}[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots]$$

و رابطه بازگشتی به‌فرم زیر می‌باشد :

(۲۹)
$$Q_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}x\,Q_n(x)-\frac{n}{n+1}Q_{n-1}(x)$$

مثال ۴ . ۴۵ . با استفاده از فرمول (۲۹) ، $Q_2(x)$ را حساب کنید .

حل . با انتخاب $n=1$ داریم

$$Q_2(x)=\frac{3}{2}x\,Q_1(x)-\frac{1}{2}Q_0(x)$$ (۱)

و با توجه به نتایج مثال ۴ . ۳۲ . داریم :

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad Q_1(x)=\frac{x}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$$ (۲)

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$Q_2(x)=\frac{3x^2}{4}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=\left(\frac{3x^2-1}{4}\right)Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3}{2}x$$

معادلهٔ مهم دیگری که در ریاضیات مهندسی بخصوص در فیزیکی کوانتومی نقش مهمی دارد ، **معادله وابسته لژاندر** می‌باشد که صورت کلی آن به‌فرم

(۳۰)
$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

می‌باشد که در آن m یک عدد صحیح است . و معادله (۳۰) مستقل از علامت جبری m می‌باشد . (اگر $m=0$ باشد معادله (۳۰) همان معادله لژاندر (۱) است)

جوابهای معادله (۳۰) را **توابع وابسته لژاندر** می‌نامیم .

دو حالت را برای حل معادلهٔ (۳۰) در نظر می‌گیریم :

حالت اول $m\geqslant 0$. با استفاده از تغییر متغیر

$$y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u\ ,\quad |x|<1$$

داریم

$$y'=-mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u+(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u'$$

$$y''=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u''-2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u$$

$$+2m\left(\frac{m}{2}-1\right)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}u$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله (۲۹) داریم

(۳۱)
$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(n-m)(n+m+1)u=0$$

حال اگر m بار از معادله لژاندر

(۳۲)
$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

مشتق بگیریم به رابطه‌ای مشابه با رابطه (۳۱) می‌رسیم . پس جواب عمومی معادله (۳۰) بوسیله رابطه زیر داده می‌شود

$$y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Y(x)}{dx^m}$$

که

$$Y(x)=a_1P_n(-x)+a_2Q_n(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ لژاندر (۳۲) می‌باشد . و جوابهای مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل (۳۰) که به توابع وابسته لژاندر نوع اول و نوع دوم موسوم هستند ، عبارتند از

(۳۳)
$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

و

(۳۴)
$$Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}$$

تذکر ۳ .

$$P_n^0(x)=P_n(x)$$
$$Q_n^0(x)=Q_n(x)$$
$$P_n^m(x)=0\ ,\quad m>n$$

$P_n^{-m}(x)$ و $Q_n^{-m}(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \ , \quad m \geqslant 0 \qquad (۳۵)$$

$$Q_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^m(x) \ , \quad m \geqslant 0 \qquad (۳۶)$$

مشابه با چندجمله‌ایهای لژاندر، $P_n^m(x)$ ها نیز در فاصله $-1 \leqslant x \leqslant 1$ متعامد هستند و داریم

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x)\, dx = 0 \ , \quad n \neq k \qquad (۳۷)$$

و

$$\int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (۳۸)$$

تذکر ۴. $P_n^m(x)$ به‌ازای هر x در فاصله $[-1,1]$ همگراست و $Q_n^m(x)$ به‌ازای هر x در فاصله $(-1,1)$ همگرا می‌باشد.

مثال ۴۶.۴. توابع وابسته لژاندر $P_1^1(x)$ و $P_2^1(x)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به فرمول (۳۳) داریم

$$\begin{aligned} P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{dP_2(x)}{dx} \\ &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 3x(1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{dP_1(x)}{dx} \\ &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} x \\ &= (1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

مثال ۴۷.۴. درستی فرمول (۳۸) را برای $P_1^1(x)$ نشان دهید.

حل.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} [P_1^1(x)]^2\, dx &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

از طرفی

$$\frac{2}{2\times 1+1} \cdot \frac{(1+1)!}{(1-1)!} = \frac{4}{3}$$

مجموعه مسائل ۳.۴

۱. جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید

آ. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

ب. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

۲. چندجمله‌ایهای زیر را به‌صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر بیان کنید.

آ. $x^4 - 3x^2 + x$

ب. $x^3 + x - 2$

۳. مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید.

آ. $\int_{-1}^{1} x^2 P_3(x)\, dx$

ب. $\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\, dx$

پ. $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2) P_3(x)\, dx$

۴. چند جمله اول بسط توابع زیر را برحسب توابع لژاندر بیان کنید.

آ. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$

ب. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$

۵. $Q_3(x)$ را پیدا کنید.

۶. $P_4^2(x)$ و $P_4^3(x)$ را حساب کنید.

۷. $Q_1^1(x)$ و $Q_1^2(x)$ را حساب کنید.

۸. چندجمله‌ای $f(x)=x^3$ را به‌صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر بیان کرده سپس به‌ازای مقادیر مختلف m انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx$$

۴ . ۴ . روش توسعه یافته سری توانی ، روش **فروبنیوس***

بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم که کاربردهای زیادی نیز دارند، دارای ضرایبی هستند که در نقطه $x=0$ تحلیلی نمی‌باشد. ولی خوشبختانه قضیهٔ زیر را می‌توان درمورد آنها به‌کار برد.

قضیه ۴ . ۱۳ . هر معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم

$$y''+\frac{g(x)}{x}y'+\frac{h(x)}{x^2}y=0 \qquad (۱)$$

که توابع $g(x)$ و $h(x)$ در نقطه $x=0$ تحلیلی باشند، لااقل دارای یک جواب به‌فرم

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m\ ,\quad c_0\neq 0 \qquad (۲)$$

خواهد بود و r می‌تواند عددی حقیقی و یا موهومی باشد و طوری انتخاب می‌شود که $C_0\neq 0$ است.

تذکر ۱. در قضیه فوق می‌توان به‌جای x، $x-a$ نیز قرار داد.

روشی که برای حل معادلهٔ (۱) به‌کار می‌رود به روش **فروبنیوس** معروف است. برای حل (۱) ابتدا (۱) را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$x^2y''+xg(x)y'+h(x)y=0 \qquad (۳)$$

از طرفی

$$g(x)=g(0)+\frac{x}{1!}g'(0)+\frac{x^2}{2!}g''(0)+\cdots$$

* *Frobenius*

$$h(x)=h(0)+\frac{x}{1!}h'(0)+\frac{x^2}{2!}h''(0)+\cdots$$

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^{m+r}$$

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)C_m x^{m+r-1}$$

$$y''=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)C_m x^{m+r+2}$$

با جایگذاری روابط بالا در (۳) داریم:

$$x^r\{\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)C_m x^m+(\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)C_m x^m)(g(0)+\frac{x}{1!}g'(0)+\cdots)$$

$$+(\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m)(h(0)+\frac{x}{1!}h'(0)+\cdots)\}=0 \qquad (۴)$$

حال ضرایب x های هم‌توان را مساوی قرار می‌دهیم تا r و C_i ها بدست آید. چون کمترین توان x در (۴)، r می‌باشد لذا ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم

ضریب x^r $\quad [r(r-1)+rg(0)+h(0)]C_0=0$

و چون $C_0\neq 0$ است پس باید

$$r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0 \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵) را **معادلهٔ شاخصی*** می‌نامیم. با حل معادلهٔ شاخصی r بدست می‌آید و با جایگذاری r در (۴) و با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، C_i ها بدست می‌آیند. ولی یکی از جوابهای معادلهٔ (۱) همیشه به‌فرم (۲) می‌باشد و برای بدست آوردن جواب دیگر که با جواب اول مستقل خطی باشد، ــ با توجه به اینکه معادلهٔ شاخصی یک معادلهٔ درجه دوم با ضرایب حقیقی است ــ سه حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول. معادلهٔ شاخصی دارای دو ریشه متمایز باشد که تفاضل آنها عدد صحیح نباشد**

* *Indicial equation*

** این حالت شامل ریشه‌های مختلط مزدوج نیز هست چون در این صورت تفاضل ←

حالت دوم. معادلهٔ شاخصی ریشه مضاعف داشته باشد.

حالت سوم. معادلهٔ شاخصی دارای دو ریشه متمایز باشد، ولی تفاضل آنها عدد صحیح باشد.

تعریف ۴. ۹. در معادلهٔ دیفرانسیل

$$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0 \qquad (۶)$$

که f_1 و f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای می‌باشند، نقطه $x=a$ را منفرد گوییم اگر $f_1(a)=0$ باشد و چنانچه طرفین (۶) را بر ضریب y'' تقسیم کنیم و آنرا به‌فرم زیر بنویسیم

$$y''+\frac{g(x)}{x-a}y'+\frac{h(x)}{(x-a)^2}y=0 \qquad (۷)$$

و $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند، در اینصورت نقطه $x=a$ را یک نقطه منفرد منظم گوییم و در غیر این صورت منفرد نامنظم.

قضیه ۴. ۱۴. اگر درمعادلهٔ دیفرانسیل (۶)، نقطه $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد آنگاه معادله لااقل دارای یک جواب به‌فرم زیر می‌باشد.

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m \ , \quad C_0\neq 0$$

مثال ۴. ۴۸. در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x-2)^3x^2y''+4(x-2)xy'-3y=0$$

$x=0$ یک نقطه منفرد منظم و $x=2$ یک نقطه منفرد نامنظم و بقیه نقاط x، معمولی می‌باشند.

روش حل معادله در حالت اول.

اگر تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخصی عدد صحیح نباشد، ابتدا به‌جای r، r_1 را در (۴) قرار می‌دهیم و سپس با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، c_i ها را

ریشه‌ها به‌صورت زیر می‌باشد. $r_1=a+bi \ , \ r_2=a-bi \ , \ r_1-r_2=2bi$

پیدا می‌کنیم و جواب اول معادله به‌فرم

$$y_1=x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m$$

خواهد بود و سپس در (۴) به‌جای r، r_2 قرار می‌دهیم و مجددا" با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، c_i ها را پیدا می‌کنیم و جواب دوم به‌فرم

$$y_2=x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m$$

خواهد بود و y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی هستند و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌شود

$$y=Ay_1+By_2$$

مثال ۴. ۴۹. معادلهٔ دیفرانسیل

$$4xy''+2(1-x)y'-y=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. $x=0$ یک نقطهٔ منفرد می‌باشد ($f_1(0)=0$) لذا طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم و به‌فرم (۷) می‌نویسیم

$$y''+\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x}{2}y'-\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{x^2}y=0$$

توابع $\frac{1-x}{2}$ و $\frac{x}{4}$ هر دو در نقطهٔ $x=0$ تحلیلی می‌باشند، لذا $x=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم می‌باشد پس معادله دارای جوابی به‌فرم

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m \ , \quad C_0\neq 0$$

می‌باشد با جایگذاری y و y' و y'' در معادلهٔ (۱) داریم

$$4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)C_m x^{m+r-1}+2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)C_m x^{m+r-1}$$

$$-2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)C_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^{m+r}=0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(4m+4r-2)C_m x^{m+r-1}-\sum_{m=0}^{\infty}(2m+2r+1)C_m x^{m+r}=0 \qquad (۲)$$

ابتدا ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادلهٔ شاخصی بدست آید .

ضریب x^{r-1} $\qquad r(4r-2)C_0=0$

و چون $C_0\neq 0$ است پس $\qquad r(4r-2)=0\ ,\ r_1=\frac{1}{2}\ ,\ r_2=0$

حال در (۲) به‌جای r مقدار $\frac{1}{2}$ گذارده،

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+\frac{1}{2})(4m)C_m x^{m-\frac{1}{2}}-\sum_{m=0}^{\infty}(2m+2)C_m x^{m+\frac{1}{2}}=0$$

برای پیدا کردن c_i ها، ضرایب x های هم‌توان را مساوی قرار می‌دهیم .

ضریب $x^{1/2}$ $\qquad 4(1+\frac{1}{2})C_1-2C_0=0\ ,\ C_1=\frac{C_0}{3}$

ضریب $x^{1+1/2}$ $\qquad 8(2+\frac{1}{2})C_2-(2+2)C_1=0\ ,\ C_2=\frac{C_1}{5}=\frac{C_0}{3\times 5}$

ضریب $x^{2+1/2}$ $\qquad 12(3+\frac{1}{2})C_3-(4+2)C_2=0\ ,\ C_3=\frac{C_2}{7}=\frac{C_0}{3\times 5\times 7}$

....

ضریب $x^{n+1/2}$

$$(n+1+\frac{1}{2})[4(n+1)]C_{n+1}-2(n+1)C_n=0$$

رابطهٔ بازگشتی

$$C_{n+1}=\frac{C_n}{2n+3}$$

و جواب اول معادله به‌فرم

$$y_1=x^{1/2}c_0(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3\times 5}+\frac{x^3}{3\times 5\times 7}+\dots)$$

و شعاع همگرایی این سری

$$\frac{1}{R_1}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0\ ,\ R_1=\infty$$

برای بدست آوردن جواب دوم ، در (۲) به‌جای r مقدار $r=0$ قرار می‌دهیم :

$$\sum_{m=0}^{\infty}m(4m-2)c_m x^{m-1}-\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)c_m x^m=0$$

ضریب x^0 $\qquad 1\times 2c_1-c_0=0\ ,\ c_1=\frac{c_0}{1\times 2}$

ضریب x $\qquad 2(8-2)c_2-(2+1)c_1=0\ ,\ c_2=\frac{c_1}{2^2}=\frac{c_0}{2^2\times 2!}$

ضریب x^2 $\qquad 3\times 10c_3-5c_2=0\ ,\ c_3=\frac{c_2}{2\times 3}=\frac{c_0}{2^3\times 3!}$

....

ضریب x^n $\qquad (n+1)[4(n+1)-2]c_{n+1}-(2n+1)c_n=0$

رابطهٔ بازگشتی

$$c_{n+1}=\frac{c_n}{2(n+1)}$$

و جواب دوم معادله به‌فرم

$$y_2=x^0C_0(1+\frac{x}{2\times 1!}+\frac{x^2}{2^2\times 2!}+\frac{x^3}{2^3\times 3!}+\dots)$$

و شعاع همگرایی y_2

$$\frac{1}{R_2}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0\ ,\ R_2=\infty$$

و جواب عمومی به‌فرم

$$y=Ay_1+By_2$$

می‌باشد و به‌ازای جمیع مقادیر x همگراست.*

روش حل معادله در حالت دوم :

اگر معادلهٔ شاخصی دارای ریشه مضاعف باشد یعنی

---

* شعاع همگرایی جواب عمومی $R_1\cap R_2$ می‌باشد .

$$(g(0)-1)^2 = 4h(0) \ , \quad r_1 = r_2 = \frac{1-g(0)}{2} = r$$

جواب اول معادله مشابه با حالت قبل محاسبه می‌شود و به‌فرم

$$y_1(x) = x^{\frac{1-g(0)}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \ , \quad C_0 \neq 0$$

می‌باشد و برای پیدا کردن جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم یعنی جواب دوم را به‌فرم $y_2 = u y_1$ در نظر می‌گیریم و با جایگذاری y_2 در معادلهٔ دیفرانسیل u را تعیین می‌کنیم و فرم جواب دوم به‌صورت زیر می‌باشد

$$y_2(x) = y_1(x) Ln x + x^{\frac{1-g(0)}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m \qquad x>0 \qquad (۸)$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر است:

$$y = A y_1 + B y_2$$

مثال ۴.۵۰. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2 y'' - x y' + (x^2+1) y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. چون $f_1(0)=0$ است پس $x=0$ یک نقطهٔ منفرد می‌باشد، لذا طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم و به‌فرم (۷) می‌نویسیم

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{x^2+1}{x^2} y = 0$$

توابع -1 و x^2+1 در $x=0$ تحلیلی می‌باشد، پس $x=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم است و معادلهٔ دیفرانسیل (۱) دارای جوابی به‌فرم زیر است

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \ , \quad C_0 \neq 0$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r+2} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 C_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r+2} = 0 \qquad (۲)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب کمترین توان x، معادلهٔ شاخصی را پیدا می‌کنیم

ضریب x^r $\qquad (r-1)^2 C_0 = 0$

چون $C_0 \neq 0$ است پس $\qquad r_1 = r_2 = 1$

برای بدست آوردن جواب اول معادله در (۲) به‌جای r، مقدار $r=1$ را قرار می‌دهیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+3} = 0$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، c_i ها را بدست می‌آوریم

ضریب x^2 $\qquad 1^2 c_1 = 0 \ , \quad c_1 = 0$

ضریب x^3 $\qquad 2^2 c_2 + c_0 = 0 \ , \quad c_2 = -\frac{c_0}{2^2}$

ضریب x^4 $\qquad 3^2 c_3 + c_1 = 0 \ , \quad c_3 = 0$

. . . .

ضریب x^{n+3} $\qquad (n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0$

رابطه بازگشتی

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)^2}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{(4)^2} = \frac{c_0}{2^2 \times 4^2}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 \times 4^2 \times 6^2}$$

و تمام ضرایب فرد صفر می‌باشد، و با انتخاب $c_0 = 1$ داریم

$$y_1 = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots\right)$$

برای بدست آوردن جواب دوم، y_2 را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y_2 = y_1 \ln x + x \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

y_2' و y_2'' را حساب می‌کنیم

$$y_2' = y_1' \ln x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) a_m x^m$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x + 2y_1' \frac{1}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) a_m x^{m-1}$$

با جایگذاری y_2، y_2' و y_2'' در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) داریم:

$$(x^2 y_1'' - x y_1' + (x^2+1) y_1) \ln x + 2x y_1' - 2y_1$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0$$

و چون y_1 جواب معادله است لذا ضریب $\ln x$ مساوی صفر می‌باشد و داریم

$$2x\left(1 - \frac{3x^2}{2^2} + \frac{5x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{7x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots\right)$$

$$-2\left(x - \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^7}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان، ضرایب a_i را بدست می‌آوریم

ضریب x: $2 - 2 = 0$

ضریب x^2: $1^2 a_1 = 0 \ , \ a_1 = 0$

ضریب x^3: $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2^2 a_2 = 0 \ , \ a_2 = \frac{1}{2^2}$

ضریب x^4: $3^2 a_3 + a_1 = 0 \ , \ a_3 = 0$

ضریب x^5: $\frac{2}{2^2 \times 4^2}(5-1) + 4^2 a_4 + a_2 = 0 \ , \ a_4 = -\frac{1}{2^2 \times 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

و تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشد و جواب دوم به‌فرم زیر است

$$y_2 = y_1 \ln x + x\left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \times 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots\right)$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = A y_1 + B y_2$$

مثال ۴ . ۵۱ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$x y'' + (1 - 2x) y' + (x - 1) y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. نقطهٔ $x = 0$ یک نقطهٔ منفرد می‌باشد و معادله را به‌فرم استاندارد می‌نویسیم

$$y'' + \frac{1 - 2x}{x} y' + \frac{x(x-1)}{x^2} y = 0$$

توابع $1 - 2x$ و $x(x-1)$ در $x = 0$ تحلیلی می‌باشند، پس $x = 0$ یک نقطهٔ منفرد منظم است.

با جایگذاری y و y' و y'' در معادلهٔ دیفرانسیل داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$

$$-2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 2r + 1) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)^2 c_m x^{m+r-1} = 0 \qquad (۲)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادلهٔ شاخص بدست آید

ضریب x^{r-1}: $r^2 c_0 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$

در (۲) به‌جای r مقدار صفر قرار می‌دهیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m-1} = 0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم‌توان داریم

ضریب x^0 $\quad -c_0 + 1^2 c_1 = 0 \quad , \quad c_1 = \dfrac{c_0}{1!}$

ضریب x $\quad c_0 - 3c_1 + 2^2 c_2 = 0 \quad , \quad c_2 = \dfrac{c_0}{2!}$

ضریب x^2 $\quad c_1 - 5c_2 + 3^2 c_3 = 0 \quad , \quad c_3 = \dfrac{c_0}{3!}$

ضریب x^3 $\quad c_2 - 7c_3 + 4^2 c_4 = 0 \quad , \quad c_4 = \dfrac{c_0}{4!}$

و به‌قرینه معلوم است که $c_n = \dfrac{c_0}{n!}$ و جواب اول با انتخاب $c_0 = 1$ به‌فرم زیر می‌باشد :

$$y_1 = x^0 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = e^x$$

در جنس مسائلی که جواب اول به‌فرم سری ساخته شده‌ای می‌باشد می‌توان برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده کرد یعنی جواب دوم را به‌فرم

$$y_2 = u e^x \qquad (۳)$$

در نظر گرفت و در معادله‌ٔ دیفرانسیل (۱) به‌جای y و y' و y'' مقادیر y_2 ، y'_2 و y''_2 را قرار داد و u را حساب کرد

$$e^x x u'' + 2e^x x u' + e^x x u + (1 - 2x) e^x u' + (1 - 2x) e^x u$$
$$+ (x - 1) e^x u = 0$$

$$x u'' + u' = 0 \qquad (۴)$$

و (۴) یک معادله‌ٔ دیفرانسیل مرتبه‌ٔ دوم فاقد تابع می‌باشد . با فرض

$$u' = z \quad , \quad u'' = z'$$

$$x z' + z = 0$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$Ln\, z + Ln\, x = Ln\, c$$

$$z = \frac{c}{x}$$

و با انتگرالگیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$u = c\, Ln\, x + \lambda \qquad (۵)$$

با جایگذاری (۵) در (۳) داریم

$$y_2 = c\, e^x\, Ln\, x + \lambda\, e^x$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر است :

$$y = A\, e^x + B\, e^x\, Ln\, x$$

روش حل معادله در حالت سوم :

اگر تفاضل ریشه‌های معادله‌ٔ شاخصی عدد صحیح باشد ، یعنی اگر $r_2 < r_1$ ریشه‌های معادله شاخصی باشند $r_1 - r_2 = n$ و $n \in N$ در این صورت جواب اول را متناظر با ریشه بزرگتر حساب می‌کنیم

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad , \quad c_0 \neq 0$$

و برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم و فرم جواب دوم به‌صورت زیر می‌باشد

$$y_2 = k\, y_1 Ln\, x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad , \quad x > 0$$

و جواب عمومی به‌فرم زیر است :

$$y = A\, y_1 + B\, y_2$$

مثال ۴ . ۵۳ . معادله‌ٔ دیفرانسیل

$$x y'' - 2y' + y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . $x = 0$ یک نقطه‌ٔ منفرد است ، لذا با تقسیم طرفین (۱) بر ضریب y'' و نوشتن

آن به‌فرم استاندارد داریم

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{x}{x^2} y = 0$$

توابع $2-$ و x در نقطه‌ی $x=0$ تحلیلی می‌باشند پس $x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم است. با جایگذاری y ، y' و y'' در (۱) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-3)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \quad (۲)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادله‌ی شاخص بدست آید.

ضریب x^{r-1} $\qquad r(r-3)c_0 = 0 \;,\; r_1 = 3 \;,\; r_2 = 0$

چون تفاضل ریشه‌ها عدد صحیح می‌باشد، لذا جواب اول را متناظر با ریشه بزرگتر بدست می‌آوریم برای این کار در (۲) به‌جای r مقدار ۳ را می‌گذاریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+3)m\,c_m x^{m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+3} = 0$$

ضریب x^3 $\qquad 4c_1 + c_0 = 0 \;,\; c_1 = -\frac{c_0}{4}$

ضریب x^4 $\qquad 10c_2 + c_1 = 0 \;,\; c_2 = \frac{c_0}{40}$

ضریب x^5 $\qquad 18c_3 + c_2 = 0 \;,\; c_3 = -\frac{c_0}{720}$

ضریب x^{n+3} $\qquad (n+4)(n+1)c_{n+1} + c_n = 0$

رابطه‌ی بازگشتی

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{(n+4)(n+1)}$$

و جواب اول معادله با انتخاب $c_0 = 1$ به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y_1 = x^3\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{720} + - \cdots\right)$$

جواب دوم را به‌فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$y_2 = k y_1 Lnx + x^0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

y'_2 و y''_2 را حساب می‌کنیم

$$y'_2 = k y'_1 Lnx + k y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y''_2 = k y''_1 Lnx + 2k y'_1 \frac{1}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

با جایگذاری y_2 و y'_2 و y''_2 در معادله‌ی دیفرانسیل (۱) داریم

$$(x y''_1 - 2y'_1 + y_1) k Lnx + 2k y'_1 - 3\frac{k y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-3) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

ضریب $k Lnx$ برابر صفر است چون y_1 جواب معادله می‌باشد. پس

$$2k\left(3x^2 - x^3 + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{120} + - \cdots\right) - 3k\left(x^2 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} - \frac{x^5}{720} + - \cdots\right) + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-3) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

ضریب x^{-1} $\qquad 0\,a_0 = 0$

رابطه بالا به‌ازای جمیع مقادیر a_0 برقرار است پس a_0 به‌عنوان پارامتر دلخواه مساله می‌باشد.

ضریب x^0 $\qquad 1(1-3)a_1 + a_0 = 0 \;,\; a_1 = \frac{a_0}{2}$

ضریب x $\qquad 2(2-3)a_2 + a_1 = 0 \;,\; a_2 = \frac{a_0}{4}$

ضریب x^2 $\qquad 6k - 3k + 0a_3 + a_2 = 0 \;,\; k = -\frac{a_0}{12}$

رابطهٔ بالا به‌ازای جمیع مقادیر a_3 درست است پس a_3 نیز به‌عنوان پارامتر دلخواه می‌باشد ولی از آنجایی که جواب عمومی معادلهٔ مرتبهٔ دوم به دو پارامتر دلخواه بستگی دارد و یک پارامتر دلخواه در جواب اول است، پس جواب دوم فقط باید به یک پارامتر دلخواه بستگی داشته باشد، لذا a_3 پارامتر اضافی است و می‌توان آنرا صفر اختیار کرد. ولی اگر این پارامتر اضافی را صفر اختیار نکنیم، اضافی بودن آن در جواب کاملاً مشخص می‌شود و خود تاییدی بر صحت محاسبات می‌باشد

ضریب x^3 $\qquad -2k+\frac{3}{4}k+4a_4+a_3=0 \;,\; a_4=-\frac{a_3}{4}-\frac{5a_0}{192}$

ضریب x^4 $\qquad \frac{k}{4}-\frac{3k}{40}+10a_5+a'_4=0 \;,\; a_5=\frac{a_3}{40}+\frac{13a_0}{3200}$

و به‌همین ترتیب بقیه ضرایب را حساب می‌کنیم و

$$y_2=-\frac{a_0}{12}\,y_1\,Ln\,x+a_0\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{192}+\frac{13x^5}{3200}-+\dots\right)$$

$$+a_3x^3\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{40}-+\dots\right)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم ضریب a_3 همان y_1 است و چون جواب عمومی به‌فرم

$$y=Ay_1+By_2$$

می‌باشد، لذا می‌توانستیم a_3 را صفر اختیار کنیم.

مثال ۴ . ۵۳ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy''-3y'+xy=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. نقطه $x=0$ یک نقطهٔ منفرد می‌باشد، لذا معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را به‌فرم استاندارد می‌نویسیم

$$y''-\frac{3}{x}\,y'+\frac{x^2}{x^2}\,y=0$$

توابع -3 و x^2 در نقطهٔ $x=0$ تحلیلی می‌باشند پس $x=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم

است. با جایگذاری y و y' و y'' در (۱) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1}-3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1}=0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-4)c_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1}=0 \qquad (۲)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادلهٔ شاخصی بدست آید

ضریب x^{r-1} $\qquad r(r-4)c_0=0 \;,\; r_1=4 \;,\; r_2=0$

برای بدست آوردن جواب اول در (۲) به‌جای r ، مقدار ۴ را می‌گذاریم و سپس c_i ها را حساب می‌کنیم

$$\sum_{m=0}^{\infty}m(m+4)c_m x^{m+3}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+5}=0$$

ضریب x^4 $\qquad 1\times5c_1=0 \;,\; c_1=0$

ضریب x^5 $\qquad 2\times6c_2+c_0=0 \;,\; c_2=-\frac{c_0}{12}$

. . . .

ضریب x^{n+5} $\qquad (n+2)(n+6)c_{n+2}+c_n=0$

رابطهٔ بازگشتی

$$c_{n+2}=-\frac{c_n}{(n+2)(n+6)}$$

$$c_3=c_5=\dots=c_{2k+1}=0$$

$$c_4=-\frac{c_2}{4\times8}=\frac{c_0}{4\times8\times12}$$

تمام ضرایب فرد صفر می‌باشد و ضرایب زوج را می‌توان با توجه به رابطهٔ بازگشتی محاسبه نمود و جواب اول معادله با انتخاب $c_0=1$ به‌فرم زیر است

$$y_1 = x^4\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{4\times 8\times 12} - + \dots\right)$$

جواب دوم را به‌فرم

$$y_2 = k\, y_1 \,\mathrm{Ln}\,x + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

در نظر می‌گیریم و y_2 ، y_2' و y_2'' را در معادلهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$y_2' = k\, y_1' \,\mathrm{Ln}\,x + k\, y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = k\, y_1'' \,\mathrm{Ln}\,x + 2k\, y_1' \frac{1}{x} - \frac{k\, y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

$$(x y_1'' - 3 y_1' + x y_1)\, k \,\mathrm{Ln}\,x + 2k\, y_1' - 4\frac{k\, y_1}{x^2} +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-4) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

ضریب $k\,\mathrm{Ln}\,x$ مساوی صفر است زیرا y_1 جواب معادله می‌باشد پس

$$2k\left(4x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{4\times 12} - + \dots\right) - 4k\left(x^3 - \frac{x^5}{12} + \frac{x^7}{4\times 8\times 12}\right.$$

$$\left. - + \dots\right) + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-4) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

ضریب x^{-1} $\qquad 0\, a_0 = 0$

که به‌ازای جمع مقادیر a_0 رابطه بالا برقرار است پس a_0 پارامتردلخواه می‌باشد

ضریب x^0 $\qquad -3a_1 = 0 \quad , \quad a_1 = 0$

ضریب x $\qquad -4a_2 + a_0 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{a_0}{4}$

ضریب x^2 $\qquad -3a_3 + a_1 = 0 \quad , \quad a_3 = 0$

ضریب x^3 $\qquad 4k + 0\,a_4 + a_2 = 0 \quad , \quad k = \frac{-a_0}{16}$

رابطه فوق به‌ازای جمع مقادیر a_4 برقرار است پس a_4 نیز پارامتر دلخواه می‌باشد و

مشابه با بحثی که در مثال قبل شد، این پارامتر اضافی اضافی است. ومی‌توان آن را صفر اختیار کرد

ضریب x^4 $\qquad 5a_5 + a_3 = 0 \quad , \quad a_5 = 0$

و تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند.

ضریب x^5 $\qquad -\frac{2k}{3} + 12a_6 + a_4 = 0 \quad , \quad a_6 = -\frac{a_4}{12} - \frac{a_0}{24}$

بقیه ضرایب نیز به‌همین ترتیب محاسبه می‌شود و جواب دوم به‌فرم زیر می‌باشد.

$$y_2 = -\frac{a_0}{16}\, y_1 \,\mathrm{Ln}\,x + a_0\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{24} + - \dots\right)$$
$$+ a_4\left(x^4 - \frac{x^6}{12} + - \dots\right)$$

ملاحظه می‌کنید که ضریب a_4 همان y_1 می‌باشد لذا می‌توان a_4 را صفر اختیار نمود.
و جواب عمومی به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y = A\, y_1 + B\, y_2$$

مثال ۴.۵۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x y'' + 2y' + x y = 0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. $x = 0$ یک نقطهٔ منفرد منظم می‌باشد، با جایگذاری y ، y' و y'' در معادله دیفرانسیل (۱) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r+1) c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0 \qquad (۲)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادلهٔ شاخصی بدست آید

ضریب x^{r-1} $\qquad r(r+1)c_0 = 0 \quad , \quad r_1 = 0 \quad , \quad r_2 = -1$

برای تعیین جواب اول در (۲) به‌جای r مقدار صفر را می‌گذاریم و سپس c_i ها را حساب می‌کنیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)c_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

ضریب x^0 $\qquad 2c_1 = 0 \quad , \quad c_1 = 0$

ضریب x $\qquad 6c_2 + c_0 = 0 \quad , \quad c_2 = -\frac{c_0}{3!}$

....

ضریب x^{n+1} $\qquad (n+2)(n+3)c_{n+2} + c_n = 0$

رابطهٔ بازگشتی

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+3)}$$

$$c_3 = 0 \ , \ c_5 = 0 \ , \ \ldots$$

تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند.

$$c_4 = -\frac{c_2}{5\times 4} = \frac{c_0}{5!}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{7\times 6} = -\frac{c_0}{7!}$$

....

و جواب اول با انتخاب $c_0 = 1$ به‌فرم زیر می‌باشد

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \ldots$$

جواب دوم را به‌فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$y_2 = k y_1 Ln x + x^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

y_2' و y_2'' را حساب می‌کنیم و در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم

$$y_2' = k y_1' Ln x + k y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1) a_m x^{m-2}$$

$$y_2'' = k y_1'' Ln x + 2k y_1' \frac{1}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2) a_m x^{m-3}$$

در معادلهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم

$$(x y_1'' + 2y_1' + x y_1) k Ln x + 2k y_1' + \frac{k y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

چون y_1 جواب معادله است، لذا ضریب $k\,Ln x$ برابر صفر می‌باشد و داریم

$$2k\left(-\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5\times 3\times 2} - \frac{x^5}{7\times 5\times 4\times 3\times 2} + \ldots\right)$$

$$+ k x^{-1}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

ضریب x^{-2}، $\qquad 0a_0 = 0$

و a_0 به‌عنوان پارامتر دلخواه است

ضریب x^{-1} $\qquad k + 0a_1 = 0 \quad , \quad k = 0$

و چون رابطه بالا به‌ازای جمیع مقادیر a_1 برقرار است لذا a_1 نیز پارامتر دلخواه می‌باشد ولی پارامتر اضافی است.

ضریب x^0 $\qquad 2a_2 + a_0 = 0 \quad , \quad a_2 = -\frac{a_0}{2}$

ضریب x $\qquad 3\times 2a_3 + a_1 = 0 \quad , \quad a_3 = -\frac{a_1}{3!}$

ضریب x^2 $\qquad 4\times 3a_4 + a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = \frac{a_0}{4!}$

....

ضریب x^n $\qquad (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$

رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5\times 4} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6\times 5} = -\frac{a_0}{6!}$$

و بقیه ضرایب به‌همین ترتیب محاسبه می‌شوند و جواب دوم به‌فرم زیر می‌باشد

$$y_2 = x^{-1}a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots\right)$$
$$+x^{-1}a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots\right)$$

و ملاحظه می‌کنیم که ضریب a_1 مشابه با y_1 است و لذا می‌توانستیم آنرا صفر اختیار کنیم و جواب عمومی به‌فرم زیر است:

$$y = Ay_1 + By_2$$

تذکر ۲. هرگاه ریشه‌های معادله شاخصی مضاعف باشند در این صورت y_2 حتماً" دارای جمله لگاریتمی می‌باشد. ولی در حالت سوم ممکن است y_2 دارای جملهٔ لگاریتمی نباشد مانند مثال بالا.

مجموعه مسائل ۴.۴.

در مسائل زیر نشان دهید که $x=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم می‌باشد و سپس جواب عمومی هریک را بدست آورید.

۱. $(2x^2+x^3)y''+(x+3x^2)y'-(1+4x)y=0$

۲. $3x^2y''+x(2-x)y'-(2+x^2)y=0$

۳. $5x^2y''+xy'-(1-x^3)y=0$

۴. $2xy''+5y'+xy=0$

۵. $3x(2+3x)y''-4y'+4y=0$

۶. $x^2(4+x)y''+7xy'-y=0$

۷. $xy''+y'+2y=0$

۸. $xy''+y'+2xy=0$

۹. $x^2y''-3xy'+4(1+x)y=0$

۱۰. $x^2y''-x(1+x)y'+y=0$

۱۱. $x^2y''-x(2x+3)y'+4y=0$

۱۲. $x^2y''+x(x^2-1)y'+(1-x^2)y=0$

۱۳. $x^2y''+x(2x-1)y'+x(x-1)y=0$

۱۴. $x^2y''-x^2y'+(x^2-2)y=0$

۱۵. $x^2y''+x(3-x^2)y'-3y=0$

۱۶. $x^2(x+1)y''+x(x-4)y'+4y=0$

۴.۵. تابع گاما

تعریف ۴.۱۰. تابع گامای α را که با نماد $\Gamma(\alpha)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \qquad (1)$$

محاسبه انتگرال بالا به‌ازای α های مختلف مشکل می‌باشد و برای α متعلق به $[1,2]$ جدول موجود است و با استفاده از رابطه‌ای که در زیر اثبات می‌شود، $\Gamma(\alpha)$ برای $\alpha \notin [1,2]$ را برحسب $\Gamma(\beta)$ که $\beta \in [1,2]$ می‌باشد، بیان می‌کنیم.

با توجه به رابطه (۱) داریم،

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء،

$$u=x^{\alpha} \Rightarrow du=\alpha x^{\alpha-1}\,dx$$

$$dv=e^{-x}\,dx \Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$\Gamma(\alpha+1)=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\alpha\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

و می‌دانیم

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x}=0$$

در نتیجه داریم:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha) \qquad (۲)$$

مثال ۴.۵۵. مقدار $\Gamma(1)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطهٔ (۱) به‌ازای $\alpha=1$ داریم:

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1$$

مثال ۴.۵۶. مقدار $\Gamma(4)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطهٔ (۲) داریم:

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\,\Gamma(3)$$

$$=3\times 2\,\Gamma(2)$$
$$=3\times 2\times 1\times\Gamma(1)$$
$$=3!$$

مثال ۴.۵۷. مقدار $\Gamma(5.3)$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطهٔ (۲) داریم:

$$\Gamma(5.3)=(4.3)\,\Gamma(4.3)$$
$$=(4.3)(3.3)\,\Gamma(3.3)$$
$$=(4.3)(3.3)(2.3)\,\Gamma(2.3)$$
$$=(4.3)(3.3)(2.3)(1.3)\,\Gamma(1.3)$$

و با توجه به جدول ضمیمه

$$\Gamma(1.3)=0.897471$$

تعریف ۴.۱۱.

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha! \qquad (۳)$$

مثال ۴.۵۸. مقدار $0!$ را حساب کنید.

حل. با توجه به رابطهٔ (۳) و مثال ۴.۵۵. داریم:

$$0!=\Gamma(1)=1$$

مثال ۴.۵۹. مقدار $(3.1)!$ را حساب کنید.

حل. با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

$$(3.1)!=\Gamma(3.1+1)=(3.1)\,\Gamma(3.1)$$
$$=(3.1)(2.1)\,\Gamma(2.1)$$
$$=(3.1)(2.1)(1.1)\,\Gamma(1.1)$$

و با مراجعه به جدول داریم

$$\Gamma(1.1) = 0.951351$$

مثال ۴ . ۶۰. مقدار $(-1.6)!$ را حساب کنید.

حل. با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

$$(-1.6)! = \Gamma(-0.6) = \frac{\Gamma(0.4)}{(-0.6)} = \frac{\Gamma(1.4)}{(-0.6)(0.4)}$$

$$= \frac{0.887264}{(-0.6)(0.4)}$$

مثال ۴ . ۶۱. نشان دهید.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (۴)$$

حل. با توجه به رابطهٔ (۱) داریم:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx$$

با فرض

$$x = X^2 \Rightarrow dx = 2X\, dX$$

داریم

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-X^2}\, dX$$

و

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left[2\int_0^\infty e^{-X^2}\, dX\right]\left[2\int_0^\infty e^{-Y^2}\, dY\right]$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(X^2+Y^2)}\, dX\, dY$$

و با انتخاب

$$X = r\cos Q \ , \ Y = r\sin Q \ , \ dX\,dY = r\,dr\,dQ$$

انتگرال دوگانه فوق به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}\, r\,dr\,dQ = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty dQ$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dQ = \pi$$

و

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال ۴ . ۶۲. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x^4}\, dx \qquad (۱)$$

حل. با فرض

$$2x^4 = t \ , \ 8x^3\, dx = dt$$

انتگرال (۱) به‌فرم زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{8}\int_0^\infty \left[\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 e^{-t}\frac{1}{\left[\left(\frac{t}{2}\right)^{1/4}\right]^3}\, dt = \frac{1}{4\times 2^{1/4}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

مثال ۴ . ۶۳. مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 x^2(\ln x)^3\, dx \qquad (۱)$$

با فرض

$$x = e^{-t} \ , \ dx = -e^{-t}\, dt$$

انتگرال (۱) به‌فرم زیر بیان می‌شود

$$-\int_0^\infty e^{-3t}\, t^3\, dt$$

و با انتخاب $3t = y$ داریم:

$$-\frac{1}{3}\int_0^\infty \left(\frac{y}{3}\right)^3 e^{-y}\, dy = \frac{-1}{3^4}\int_0^\infty y^{4-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{-1}{3^4}\,\Gamma(4)$$

$$= \frac{-(3!)}{3^4}$$

مثال ۴ . ۶۴. با توجه به رابطهٔ (۲) و به‌ازای $\alpha=0$ داریم

$$\Gamma(1)=0\times\Gamma(0)$$

و

$$1=0\times\Gamma(0)=0\times(-1)!$$

پس $(-1)!=\infty$ و بطور کلی فاکتوریل اعداد صحیح منفی برابر ∞ می‌باشد.

مجموعه مسائل ۴ . ۵

۱. مطلوب است مقدار

آ): $\Gamma(-\frac{5}{2})$

ب): $\dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)}$

پ): $\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})$

مقدار انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۲. $\int_0^1 x\,Ln^3 x\,dx$

۳. $\int_0^1 \sqrt{x}\,Ln x\,dx$

۴. $\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,Ln^2 x\,dx$

۵. $\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}}e^{-4x}\,dx$

۶. $\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-3x^2}\,dx$

۷. $\int_0^\infty x^{\frac{1}{5}}e^{-2\sqrt{x}}\,dx$

۸. $\int_0^1 (-Lnx)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

۴ . ۶. معادلهٔ بسل، تابع بسل نوع اول

هر معادلهٔ دیفرانسیل به‌فرم

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (۱)$$

که در (۱) ν عددی است داده شده، یک معادلهٔ بسل نامیده می‌شود. ملاحظه می‌شود که $x=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم می‌باشد، لذا معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌فرم

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}\ ,\ c_0\neq 0 \qquad (۲)$$

خواهد بود. با جایگذاری y و y' و y'' در معادلهٔ (۱) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}$$
$$-\nu^2\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r+\nu)(m+r-\nu)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}=0 \qquad (۳)$$

ضریب کمترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادلهٔ شاخصی را حساب می‌کنیم

ضریب x^r $\qquad (r+\nu)(r-\nu)=0\ ,\ r_1=\nu\ ,\ r_2=-\nu$

یعنی ریشه‌های معادلهٔ شاخصی، همیشه ν و $-\nu$ هستند و با توجه به این ریشه‌ها تنها وقتی $\nu=0$ باشد معادلهٔ شاخصی دارای ریشه مضاعف است و هنگامی‌که ν یک عدد

صحیح باشد، تفاضل ریشه‌های معادله‌ء شاخصی عدد صحیح است و درحالی که $\nu \neq 0$ و عدد صحیح نباشد، تفاضل ریشه‌های معادله‌ء شاخصی عدد صحیح نیست (بجز وقتی‌که ν مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ باشد). همان‌طور که در بخش ۴.۴ گفته شد، در هر سه حالت، جواب اول معادله‌ء (۱) به‌فرم (۲) می‌باشد و اختلاف در جواب دوم خواهد بود. حال جواب اول معادله‌ء (۱) را بدست می‌آوریم

با جایگذاری $r=\nu$ ، $(\nu \geqslant 0)$ در (۳) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2\nu)\, m\, c_m x^{m+\nu} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\nu+2} = 0$$

ضریب $x^{1+\nu}$
$$(1+2\nu)\,c_1 = 0 \quad , \quad c_1 = 0$$

ضریب $x^{n+\nu+2}$
$$(n+2+2\nu)(n+2)\,c_{n+2} + c_n = 0$$

رابطه بازگشتی

$$(۴) \qquad c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2+2\nu)} \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

و با توجه به رابطه‌ء بازگشتی داریم:

$$c_3 = c_5 = \dots = 0$$

یعنی تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشند و برای محاسبه‌ء ضرایب زوج با فرض $n=2k$ $(k \in N)$ در رابطه بازگشتی داریم:

$$c_{2k+2} = -\frac{c_{2k}}{2^2(k+1)(k+1+\nu)} \quad , \quad k=0,1,2,\dots$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(1+\nu)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \times 2(2+\nu)} = \frac{c_0}{2^4 \times 2!(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2 \times 3(3+\nu)} = -\frac{c_0}{2^6 \times 3!(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

. . . .

و جواب اول معادله‌ء (۱) به‌فرم زیر می‌باشد.

$$y_1(x) = c_0 x^{\nu}\left(1 - \frac{x^2}{2^2(1+\nu)} + \frac{x^4}{2^4 \times 2!(1+\nu)(2+\nu)} - \frac{x^6}{2^6 \times 3!(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + - \dots\right) \qquad (۵)$$

و چون c_0 پارامتر اختیاری است، مرسوم است که

$$c_0 = \frac{1}{2^{\nu}\ \Gamma(\nu+1)}$$

انتخاب شود، با این انتخاب داریم:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(1+\nu)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} \times 1!\ \Gamma(\nu+2)}$$

$$c_4 = \frac{1}{2^{4+\nu} \times 2!\ \Gamma(\nu+3)}$$

. . . .

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \times k!\ \Gamma(\nu+k+1)}$$

حال اگر این ضرایب را در (۲) قرار دهیم (یا در ۵)، یک جواب خصوصی معادله‌ء بسل بدست می‌آید و این جواب را با $J_\nu(x)$ نمایش می‌دهیم

$$(۶) \qquad J_\nu(x) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\, x^{2m}$$

این جواب معادله‌ء بسل، معروف به **تابع بسل نوع اول ازمرتبه‌ء ν** بوده و به‌ازای تمام مقادیر x همگراست، زیرا با توجه به رابطه‌ء بازگشتی (۴) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+2)(n+2+2\nu)}\right| = 0$$

و در نتیجه $R=\infty$ می‌باشد.

توجه. حال جواب متناظر با $r_2=-\nu$ را حساب می‌کنیم، با جایگذاری $r=-\nu$ در (۳) داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-2\nu)\,c_m x^{m-\nu} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+2-\nu} = 0$$

ضریب x^{1-v} $\qquad (1-2v)c_1=0 \ , \ c_1=0$

ضریب x^{n+2-v} $\qquad (n+2)(n+2-2v)c_{n+2}+c_n=0$

رابطهٔ بازگشتی

$$c_{n+2}=-\frac{c_n}{(n+2)(n+2-2v)}$$

و جون $c_1=0$ است پس تمام ضرایب فرد مساوی صفر می‌باشد و برای محاسبه ضرایب زوج

$$c_{2k+2}=-\frac{c_{2k}}{2^2(k+1)(k+1-v)}$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(1-v)}$$

$$c_4=-\frac{c_0}{2^2\times 2!(2-v)}=\frac{c_0}{2^4\times 2!(1-v)(2-v)}$$

$$c_6=-\frac{c_4}{2^2(2+1)(3-v)}=-\frac{c_0}{2^6\times 3!(1-v)(2-v)(3-v)}$$

. . . .

و حواب دوم معادلهٔ (۱) به‌فرم

$$y_2(x)=c_0x^{-v}\left(1-\frac{x^2}{2^2(1-v)}+\frac{x^4}{2^4\times 2!(1-v)(2-v)}-\frac{x^6}{2^6\times 3!(1-v)(2-v)(3-v)}+\dots\right) \qquad (۷)$$

ملاحظه می‌شود که وقتی v یک عدد صحیح غیرمنفی است، یکی از مخرجهای (۷) صفر می‌شود و y_2 بی‌معنی است لذا وقتی‌که v عدد صحیح باشد همواره مقدار k در جواب دوم فرمول

$$y_2=ky_1\operatorname{Ln}x+x^{-v}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$$

مخالف صفر خواهد بود .

حال اگر در فرمول (۶) به‌جای v مقدار $-v$ قرار دهیم ، داریم

$$J_{-v}(x)=x^{-v}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-v}m!\,\Gamma(m-v+1)}x^{2m}$$

قضیهٔ ۴ . ۱۵ . جواب عمومی معادلهٔ بسل (۱) به‌ازای $v\neq 0$ مخالف عدد صحیح به‌فرم زیر می‌باشد .

$$y(x)=AJ_v(x)+BJ_{-v}(x) \quad , \quad x\neq 0. \qquad (۸)$$

قضیه ۴ . ۱۶ . هرگاه $v=n$ (n عدد صحیح) باشد ، آنگاه

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \qquad (۹)$$

اثبات . با توجه به فرمول (۶) و به‌ازای $v=-n$ داریم

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-n}m!\,\Gamma(m-n+1)}x^{2m-n}$$

و می‌دانیم

$$\Gamma(m-n+1)=(m-n)!$$

و چون فاکتوریل اعداد صحیح منفی ، برابر بی‌نهایت است پس جمعبندی از $m=n$ شروع می‌شود و

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-n}m!(m-n)!}x^{2m-n}$$

حال با فرض $k=m-n$ داریم

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{2^{2k+n}(k+n)!k!}x^{2k+n}=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+n}(k+n)!k!}x^{2k+n}$$

$$=(-1)^nJ_n(x).$$

قضیه فوق نشان می‌دهد که وقتی v مساوی صفر و یا عددی صحیح باشد در این صورت $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ بستگی خطی دارند و جواب عمومی معادلهٔ بسل (۱) را نمی‌توان به‌فرم (۸) نوشت . در بخش بعد درمورد جواب عمومی معادلهٔ بسل به‌ازای $v=n$ صحبت خواهیم کرد . در زیر بعضی از روابط مهم بین توابع بسل را که در کاربردهای

مهندسی اهمیت دارند بیان داشته و اثبات می‌کنیم .

(آ) : نشان دهید .

$$[x^{\nu} J_{\nu}(x)]' = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \tag{۱۰}$$

اثبات . با توجه به فرمول (۶) داریم

$$x^{\nu} J_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m+2\nu}$$

$$[x^{\nu} J_{\nu}(x)]' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2(m+\nu)}{2^{2m+\nu} m!(m+\nu)\, \Gamma(m+\nu)} x^{2m+2\nu-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{\nu}}{2^{2m+\nu-1} m!\, \Gamma(\nu-1+m+1)} x^{2m+\nu-1}$$

$$= x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

(ب) : نشان دهید

$$[x^{-\nu} J_{\nu}(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{۱۱}$$

اثبات . تمرین شماره ۱

(پ) : روابط بازگشتی

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) \tag{۱۲}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x) \tag{۱۳}$$

اثبات . با توجه به فرمولهای (۱۰) و (۱۱) داریم

$$\nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{\nu} J'_{\nu}(x) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \tag{a}$$

و

$$-\nu x^{-\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{-\nu} J'_{\nu}(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{b}$$

طرفین (a) را در $x^{-\nu}$ و طرفین (b) را در x^{ν} ضرب می‌کنیم ، داریم

$$J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) \tag{a'}$$

$$J'_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) \tag{b'}$$

با کم کردن دو رابطهٔ (a') و (b') داریم

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x)$$

و با جمع کردن دو رابطهٔ (a') و (b') داریم

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x).$$

مثال ۴ . ۶۵ . $J_4(x)$ را برحسب $J_1(x)$ و $J_0(x)$ بنویسید .

حل . با استفاده از فرمول (۱۲) ، ابتدا $J_4(x)$ را برحسب $J_3(x)$ و $J_2(x)$ نوشته

$$J_4(x) = \frac{6}{x} J_3(x) - J_2(x)$$

حال مجدداً از فرمول (۱۲) استفاده می‌کنیم و $J_3(x)$ را برحسب $J_2(x)$ و $J_1(x)$ می‌نویسیم

$$J_4(x) = \frac{6}{x}\left[\frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x)\right] - J_2(x)$$

$$= \left(\frac{24}{x^2} - 1\right) J_2(x) - \frac{6}{x} J_1(x)$$

و بالاخره $J_2(x)$ را برحسب $J_1(x)$ و $J_0(x)$ می‌نویسیم و داریم

$$J_4(x) = \left(\frac{24}{x^2} - 1\right)\left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] - \frac{6}{x} J_1(x)$$

$$= \left(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\right) J_1(x) - \left(\frac{24}{x^2} - 1\right) J_0(x) .$$

(ت) : نشان دهید

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\, dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + c \tag{۱۴}$$

اثبات . از فرمول (۱۰) داریم

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

با انتگرالگیری داریم

$$\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu}J_{\nu}(x)+c$$

(ث) : نشان دهید

$$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu}J_{\nu}(x)+c. \qquad (۱۵)$$

اثبات . از فرمول (۱۱) داریم

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

با انتگرالگیری از طرفین رابطهٔ بالا داریم

$$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu}J_{\nu}(x)+c$$

(ج) : نشان دهید

$$\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_{\nu}(x) \qquad (۱۶)$$

اثبات . کافیست از طرفین رابطهٔ (۱۳) ، انتگرال بگیریم .

مثال ۴ . ۶۶ . انتگرال زیر را حساب کنید .

$$\int J_3(x)\,dx$$

حل . با توجه به فرمول (۱۶) داریم

$$\int J_3(x)\,dx = \int J_1(x)\,dx - 2J_2(x)$$

از طرفی با انتخاب $\nu = 0$ در فرمول (۱۵) داریم

$$\int J_1(x)\,dx = -J_0(x)+c$$

پس

$$\int J_3(x)\,dx = -J_0(x) - 2J_2(x)+c$$

مثال ۴ . ۶۷ . انتگرال زیر را حساب کنید .

$$\int x^3J_0(x)\,dx$$

حل .

$$\int x^3J_0(x)\,dx = \int x^2(xJ_0(x))\,dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء و با فرض

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$xJ_0(x)\,dx = dv \Rightarrow v = xJ_1(x)$$

و

$$\begin{aligned}\int x^3J_0(x)\,dx &= x^3J_1(x) - 2\int x^2J_1(x)\,dx\\ &= x^3J_1(x) - 2x^2J_2(x)\\ &= x^3J_1(x) - 2x^2\left[\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)\right]\\ &= (x^3-4x)J_1(x) + 2x^2J_0(x)\end{aligned}$$

مثال ۴ . ۶۸ . انتگرال زیر را حساب کنید .

$$\int x^2J_2(x)\,dx$$

حل .

$$\int x^2J_2(x)\,dx = \int x^3(x^{-1}J_2(x))\,dx$$

با استفاده از فرمول (۱۵) و روش جزء به جزء داریم

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$$

$$x^{-1}J_2(x)\,dx = dv \Rightarrow v = -x^{-1}J_1(x)$$

و

$$\int x^2J_2(x)\,dx = -x^2J_1(x) + 3\int xJ_1(x)\,dx$$

و برای محاسبهٔ انتگرال $\int xJ_1(x)dx$ مجدداً از فرمول (۱۵) و روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$$x = u \Rightarrow dx = du$$
$$J_1(x)\,dx = dv \Rightarrow v = -J_0(x)$$

و در نتیجه

$$\int x^2 J_2(x)\,dx = -x^2 J_1(x) - 3xJ_0(x) + 3\int J_0(x)\,dx\,.$$

مجموعه مسائل ۴ . ۶ .

۱. فرمول (۱۱) را اثبات کنید.

۲. نشان دهید

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \qquad , \qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x$$

۳. نشان دهید

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right)$$

و

$$J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right)$$

۴. نشان دهید

$$J_{5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^2}\right]$$
$$J_{-5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{3x\sin x + (3-x^2)\cos x}{x^2}\right]$$

۵. $J_3(x)$ را برحسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ بنویسید.

۶. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف $\int x^3 J_2(x)\,dx$

ب $\int_0^1 x^3 J_0(x)\,dx$

پ $\int x^2 J_0(x)\,dx$

۷. $J_5(x)$ را برحسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ بنویسید.

۴ . ۷ . تابع بسل نوع دوم

در این بخش می‌خواهیم جواب دوم معادلهٔ بسل، وقتی $\nu = n$ باشد را بدست آوریم. بر طبق قضیهٔ ۴ . ۱۶ می‌دانیم $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ بستگی خطی دارند، لذا پایه‌ای برای جواب عمومی تشکیل نمی‌دهند. برای بدست آوردن جواب دوم که با جواب اول ($J_n(x)$) مستقل خطی باشد از روش توسعه یافته سری توانی استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $n = 0$ است، در این صورت $J_0(x)$ یک جواب است و جواب دیگر که با $J_0(x)$ مستقل خطی باشد به‌فرم زیر خواهد بود.*

$$y_2(x) = J_0(x)\,Ln x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

برای پیدا کردن ضرایب a_m، y_2 و y_2' و y_2'' را حساب کرده و در معادلهٔ بسل با اندیس صفر قرار می‌دهیم.

$$y_2'(x) = J_0'(x)\,Ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$
$$y_2''(x) = J_0''(x)\,Ln x + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

با جایگذاری y_2 و y_2' و y_2'' در معادلهٔ

$$xy'' + y' + xy = 0$$

داریم:

$$\begin{aligned} &xJ_0''(x)\,Ln x + 2J_0'(x) + J_0'(x)\,Ln x + xJ_0(x)\,Ln x \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

چون $J_0(x)$ جواب معادله می‌باشد، پس

$$Ln x\,(xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)) = 0$$

---

* در این حالت معادلهٔ شاخصی دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = 0$ بوده و معادلهٔ بسل به‌فرم $xy'' + y' + xy = 0$ می‌باشد.

حال مشتق $J_0(x)$ را حساب می‌کنیم

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

$$J_0'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}m!(m-1)!}x^{2m-1}$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-2}m!(m-1)!}x^{2m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}m^2a_mx^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}a_mx^{m+1}=0$$

حال ضرایب x های هم‌توان را مساوی صفر قرار می‌دهیم

ضریب x^0 $\qquad a_1=0$

ضریب x $\qquad -1+4a_2=0\ ,\ a_2=\frac{1}{4}$

....

ضریب x^{2n} $\qquad (2n+1)^2a_{2n+1}+a_{2n-1}=0$

و چون $a_1=0$ است پس $a_3=0$ و $a_5=0$ و ... تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند.

حال ضریب x^{2n+1} را حساب می‌کنیم

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n+1)!n!}+(2n+2)^2a_{2n+2}+a_{2n}=0$$

به‌ازای $n=1$

$$\frac{1}{4\times 2}+16a_4+a_2=0\ ,\ a_4=-\frac{3}{128}$$

و بطور کلی داریم

$$a_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

و با فرض $\qquad L_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

$$y_2(x)=J_0(x)Lnx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}L_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

توجه. اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی باشند در این صورت $c_1y_1+c_2y_2$ و y_1 مستقل خطی هستند زیرا

$$\frac{c_1y_1+c_2y_2}{y_1}=c_1+c_2\frac{y_2}{y_1}\neq \text{مقدار ثابت}$$

حال اگر به‌جای جواب دوم، ترکیب خطی از جواب‌های اول و دوم به‌صورت $a(y_2(x)+bJ_0(x))$ را در نظر بگیریم، با $a=\frac{2}{\pi}$ و $b=\gamma-Ln2$ که γ ثابت اولر* می‌باشد و این جواب را با $Y_0(x)$ نمایش می‌دهیم

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(y_2(x)+J_0(x)(\gamma-Ln2)\right)$$

یا

$$(۲)\quad Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(Ln\frac{x}{2}+\gamma\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}L_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right]$$

این جواب معادلهٔ بسل به تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ صفر یا تابع نیومن مرتبهٔ صفر معروف است حال اگر $\nu=n$ یک عدد صحیح و مخالف صفر باشد، در این صورت $J_n(x)$ جواب اول معادلهٔ بسل خواهد بود و جواب دوم که با جواب اول مستقل خطی باشد را به‌فرم زیر در نظر می‌گیریم **.

$$y_2(x)=kJ_n(x)Lnx+x^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$$

برای پیدا کردن ضرایب k و a_m باید y_2 و y_2' و y_2'' را در معادلهٔ بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

جایگذاری کرد و سپس به‌جای جواب y_2، جواب زیر را که با $J_n(x)$ مستقل خطی است در نظر گرفته

$$Y_n(x)=a(y_2+bJ_n(x))$$

که در آن $a=\frac{2}{\pi}$ و $b=\gamma-Ln2$ و این جواب به‌صورت زیر می‌باشد

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(Ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

$$(۳)\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(L_m+L_{m+n})}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

* $\gamma=0.57721566490$

←

با

$$L_0 = 0 \ , \ L_p = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{P} \quad , \quad P = 1, 2, \ldots$$

اما بطوری‌که ملاحظه کردیم، جواب دوم با توجه به‌اینکه ν یک عدد صحیح باشد یا غیرصحیح به دو فرم متفاوت بیان شد، حال می‌خواهیم شکلی از جواب دوم را ارائه دهیم که به‌ازای تمام مقادیر ν برقرار باشد.

$$(۴)\ \begin{cases} \text{آ} & Y_\nu(x) = \dfrac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \ , \quad \nu \neq 0, 1, 2, \ldots \\ \text{ب} & Y_n(x) = \lim\limits_{\nu \to n} Y_\nu(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

این جواب معادلهٔ بسل به **تابع بسل نوع دوم** از مرتبهٔ ν **یا تابع نیومن** مرتبهٔ ν معروف است.

تذکر. در حالتی‌که ν یک عدد غیرصحیح باشد $Y_\nu(x)$ ترکیب خطی از $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ می‌باشد پس با $J_\nu(x)$ مستقل خطی است و می‌تواند به‌عنوان جواب دوم تلقی گردد. و اگر $\nu = 0$ باشد در این صورت $Y_0(x)$ به‌صورت $\frac{0}{0}$ درآمده که با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، فرمول (۲) بدست می‌آید و اگر ν یک عدد صحیح باشد در این صورت $\sin n\pi$ مساوی صفر است و اگر $n = 2k$ باشد در این صورت $\cos 2k\pi$ مساوی یک است و از طرفی $J_{2k}(x) = (-1)^{2k} J_{-2k}(x)$. پس $Y_{2k}(x)$ به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و اگر $\nu = 2k+1$ باشد، $\cos(2k+1)\pi$ مساوی منهای یک خواهد بود. و $J_{2k+1}(x) = -J_{-(2k+1)}(x)$ که $Y_{2k+1}(x)$ نیز به فرم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و در هر حال با استفاده از قاعده هوپیتال فرمول (۳) را خواهیم داشت. البته با توجه به روابط زیر

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma \qquad (۵)$$

$$\lim_{P \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{P} - \ln P\right) = 0.57721566490\ldots \qquad (۶)$$

$$\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r} - \gamma \qquad (۷)$$

---

* در این حالت ریشه‌های معادلهٔ شاخصی عبارتند از $r_2 = -n$ ، $r_1 = n$ و معادلهٔ بسل به‌فرم $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$ می‌باشد.

قضیهٔ ۴ . ۱۷ . جواب عمومی معادلهٔ بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

به‌فرم زیر می‌باشد

$$y(x) = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$

مثال ۴ . ۶۹ . جواب عمومی معادلهٔ زیر را برحسب توابع بسل بنویسید.

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4) y = 0 \qquad (۱)$$

حل . معادله (۱)، معادله بسل با اندیس ۲ می‌باشد، لذا برطبق قضیهٔ ۴ . ۱۷ داریم

$$y(x) = A J_2(x) + B Y_2(x)$$

مثال ۴ . ۷۰ . جواب عمومی معادلهٔ زیر را برحسب توابع بسل بنویسید.

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0 \qquad (۱)$$

حل . معادله (۱)، معادلهٔ بسل با اندیس $\frac{۱}{۳}$ می‌باشد.

$$y(x) = A J_{1/3}(x) + B Y_{1/3}(x)$$

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ بسل

(آ) : معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \ . \qquad (۸)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\lambda x = z$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات .

$$z = \lambda x \quad , \quad dz = \lambda dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \lambda \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \lambda \frac{d^2 y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2 y}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۸) داریم

$$x^2\lambda^2\frac{d^2y}{dz^2}+x\lambda\frac{dy}{dz}+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

یا

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\nu^2)y=0 \qquad (۹)$$

که معادلهٔ بسل با تابع y و متغیر z می‌باشد لذا جواب عمومی معادلهٔ (۹) به‌فرم زیر است:

$$y=AJ_\nu(z)+BY_\nu(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۸) عبارت است از:

$$y(x)=AJ_\nu(\lambda x)+BY_\nu(\lambda x)$$

(ب): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$4x^2y''+4xy'+(x-\nu^2)y=0 \qquad (۱۰)$$

با استفاده از تغییر متغیر $z=x^{1/2}$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$$z=x^{1/2}\ ,\quad dz=\frac{1}{2}x^{-1/2}dx$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-3/2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=-\frac{1}{4}x^{-3/2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4}x^{-1}\frac{d^2y}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۱۰) داریم

$$x\frac{d^2y}{dz^2}-x^{1/2}\frac{dy}{dz}+2x^{1/2}\frac{dy}{dz}+(x-\nu^2)y=0$$

یا

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\nu^2)y=0 \qquad (۱۱)$$

$$y=AJ_\nu(z)+BY_\nu(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۰) به‌فرم زیر می‌باشد:

$$y(x)=AJ_\nu(x^{1/2})+BY_\nu(x^{1/2})$$

(پ): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$x^2y''+xy'+4(x^4-\nu^2)y=0 \qquad (۱۲)$$

با استفاده از تغییر متغیر $z=x^2$ قابل تبدیل به معادله بسل می‌باشد.

اثبات.

$$z=x^2\ ,\quad dz=2x\,dx$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=2x\frac{dy}{dz}$$

$$y''=2\frac{dy}{dz}+4x^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۱۲) داریم

$$4x^4\frac{d^2y}{dz^2}+2x^2\frac{dy}{dz}+2x^2\frac{dy}{dz}+4(x^4-\nu^2)y=0$$

یا

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\nu^2)y=0 \qquad (۱۳)$$

که (۱۳) معادلهٔ بسل با اندیس ν می‌باشد و جواب عمومی (۱۳) به‌فرم زیر است:

$$y=AJ_\nu(z)+BY_\nu(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۲) عبارت است از:

$$y=AJ_\nu(x^2)+BY_\nu(x^2)$$

(ت): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$xy''+(1+2\nu)y'+xy=0 \qquad (۱۴)$$

با استفاده از تغییر متغیر $y=x^{-v}u$ قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد (u تابعی از x است) .

اثبات .

$$y=x^{-v}u \Rightarrow y'=-v x^{-v-1}u+x^{-v}u'$$

$$y''=v(v+1)x^{-v-2}u-2vx^{-v-1}u'+x^{-v}u''$$

با جایگذاری y و y' و y'' در (۱۴) داریم

$$x^{-v-1}(x^2u''+xu'+x^2u-v^2u)=0$$

یا

(۱۵)
$$x^2u''+xu'+(x^2-v^2)u=0$$

که معادلهٔ (۱۵)، معادلهٔ بسل با تابع u و با اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۵) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$u=AJ_v(x)+BY_v(x)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۴) عبارت است از :

$$y=x^{-v}(AJ_v(x)+BY_v(x))$$

(ث) : معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

(۱۶)
$$y''+\left(1+\frac{1-4v^2}{4x^2}\right)y=0$$

با استفاده از تغییر متغیر $y=x^{1/2}u$ قابل تبدیل به معادله بسل می‌باشد .

اثبات

$$y=x^{1/2}u \quad , \quad y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}u+x^{1/2}u'$$

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-3/2}u+x^{-1/2}u'+x^{1/2}u''$$

با جایگذاری y و y'' در (۱۶) داریم

$$x^{1/2}u''+x^{-1/2}u'-\frac{1}{4}x^{-3/2}u+\left(1+\frac{1-4v^2}{4x^2}\right)x^{1/2}u=0$$

$$x^{5/2}u''+x^{3/2}u'+\left(-\frac{1}{4}+x^2+\frac{1}{4}-v^2\right)x^{1/2}u=0$$

$$x^{1/2}[x^2u''+xu'+(x^2-v^2)u]=0$$

و

(۱۷)
$$x^2u''+xu'+(x^2-v^2)u=0$$

معادلهٔ (۱۷) ، معادلهٔ بسل با تابع u و اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۷) عبارت است از :

$$u=AJ_v(x)+BY_v(x)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۶) به‌فرم زیر می‌باشد .

$$y=x^{1/2}[AJ_v(x)+BY_v(x)]$$

(ج) : معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

(۱۸)
$$x^2y''+(1-2v)xy'+v^2(x^{2v}+1-v^2)y=0$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y=x^vu \quad , \quad x^v=z$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد .

اثبات .

$$y=x^vu \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=vx^{v-1}u+x^v\frac{du}{dx}$$

$$y''=v(v-1)x^{v-2}u+2vx^{v-1}\frac{du}{dx}+x^v\frac{d^2u}{dx^2}$$

از طرفی

$$x^v=z \Rightarrow \frac{dz}{dx}=vx^{v-1}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=vx^{v-1}\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=v(v-1)x^{v-2}\frac{du}{dz}+v^2x^{2v-2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

و

$$y'=vx^{v-1}u+vx^{2v-1}\frac{du}{dz}$$

$$y'' = v(v-1)x^{v-2}u + 2v^2 x^{2v-2}\frac{du}{dz} + v(v-1)x^{2v-2}\frac{du}{dz} + v^2 x^{3v-2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

در معادله جایگذاری می‌کنیم

$$v^2 x^v \left[x^{2v}\frac{d^2u}{dz^2} + x^v \frac{du}{dz} + (x^{2v} - v^2)u \right] = 0$$

یا

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - v^2)u = 0 \tag{۱۹}$$

معادلهٔ (۱۹)، معادلهٔ بسل با تابع u و متغیر z و اندیس v می‌باشد و جواب عمومی (۱۹) به‌فرم زیر است

$$u = A J_v(z) + B Y_v(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۸) عبارت است از:

$$y = x^v [A J_v(x^v) + B Y_v(x^v)]$$

(ج): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$y'' + a x^b y = 0 \tag{۲۰}$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y = x^{1/2}u \quad , \quad z = \frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد و جواب عمومی (۲۰) به‌فرم زیر است:

$$y = x^{1/2}\left[A J_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}\right) + B Y_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}\right)\right]$$

اثبات. تمرین شمارهٔ ۱

(ح): معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت کلی

$$x^2 y'' + (1-2v)xy' + (a^2 b^2 x^{2a} + v^2 - c^2 a^2)y = 0 \tag{۲۱}$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y = x^v u \quad , \quad z = b x^a$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد.

اثبات.

$$y = x^v u \Rightarrow y' = v x^{v-1} u + x^v u'$$

$$y'' = v(v-1)x^{v-2}u + 2v x^{v-1}u' + x^v u''$$

با جایگذاری y و y' و y'' در (۲۱) داریم

$$x^2 u'' + x u' + a^2(b^2 x^{2a} - c^2)u = 0 \tag{۲۲}$$

حال از تغییر متغیر $z = b x^a$ استفاده می‌کنیم

$$z = b x^a \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a b x^{a-1}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = a b x^{a-1}\frac{du}{dz}$$

$$u'' = a(a-1)b x^{a-2}\frac{du}{dz} + a^2 b^2 x^{2a-2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

با جایگذاری در (۲۲) داریم

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - c^2)u = 0 \tag{۲۳}$$

و معادلهٔ (۲۳) یک معادلهٔ بسل با تابع u و متغیر z و اندیس c می‌باشد و جواب عمومی (۲۳) به‌فرم زیر است:

$$u = A J_c(z) + B Y_c(z)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۲۱) عبارت است از:

$$y = x^v [A J_c(b x^a) + B Y_c(b x^a)] \tag{۲۴}$$

مثال ۷۱.۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + xy = 0 \tag{۱}$$

را با استفاده از تغییر متغیر زیر حل کنید.

$$y = x^{1/2}u \quad , \quad z = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

حل

$$y = x^{1/2}u \quad , \quad y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}u'$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}u + x^{-1/2}u' + x^{1/2}u''$$

از طرفی

$$z = \frac{2}{3} x^{3/2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = x^{1/2}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = x^{1/2}\frac{du}{dz}$$

$$u'' = \frac{1}{2} x^{-1/2}\frac{du}{dz} + x\frac{d^2u}{dz^2}$$

و

$$y'' = \frac{3}{2} z \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{3}{2}\frac{du}{dz} - \frac{1}{6z}u$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$\frac{3}{2} z\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{3}{2}\frac{du}{dz} + \frac{3}{2}\left(z - \frac{1}{9z}\right)u = 0$$

یا

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)u = 0 \qquad (۲)$$

(۲) معادلهٔ بسل با تابع u و متغیر z و اندیس $\frac{1}{3}$ می‌باشد و جواب عمومی (۲) به‌فرم زیر است:

$$u = AJ_{1/3}(z) + BY_{1/3}(z)$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از*

$$y = x^{1/2}\left[AJ_{1/3}\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) + BY_{1/3}\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)\right]$$

مثال ۴ . ۷۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + \left(x^2+\frac{1}{4}\right)y = 0 \qquad (۱)$$

را با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{1/2}u$ حل کنید.

حل.

$$y = x^{1/2}u \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}u'$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}u + x^{-1/2}u' + x^{1/2}u''$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$x^{5/2}u'' + x^{3/2}u' + x^{5/2}u = 0$$

$$x^{1/2}[x^2u'' + xu' + x^2u] = 0$$

و

$$x^2u''+xu'+x^2u=0 \qquad (۲)$$

(۲) معادلهٔ بسل با تابع u و اندیس صفر می‌باشد و جواب عمومی (۲) به‌فرم زیر است

$$u = AJ_0(x)+BY_0(x)$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از**

$$y = x^{1/2}(AJ_0(x)+BY_0(x))$$

مثال ۴ . ۷۳. معادلهٔ دیفرانسیل

---

* مثال ۴ . ۷۱. حالت خاصی از فرمول (۲۰) می‌باشد با $a = b = 1$

** مثال ۴ . ۷۲. حالت خاصی از فرمول (۱۶) می‌باشد با $\nu = 0$

$$xy'' - y' + xy = 0 \qquad (۱)$$

را با استفاده از تغییر متغیر $y = xu$ حل کنید .

حل .

$$y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$$
$$y'' = 2u' + xu''$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - 1)u = 0$$

که معادلهٔ بسل با تابع u و اندیس یک می‌باشد و جواب عمومی آن به‌فرم زیر است :

$$u = AJ_1(x) + BY_1(x)$$

و جواب عمومی (۱) عبارت است از*

$$y = x(AJ_1(x) + BY_1(x))$$

مثال ۴ . ۷۴. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x(1 - 2x\tan x)y' - (x\tan x + v^2)y = 0 \qquad (۱)$$

را با استفاده از تغییر متغیر $y = u/\cos x$ حل کنید .

حل .

$$y = u\sec x \Rightarrow y' = u'\sec x + u\sec x\tan x$$
$$y'' = u''\sec x + 2u'\sec x\tan x + u(\sec x + 2\sec x\tan^2 x)$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - v^2)u = 0$$

که معادلهٔ بسل با ندیس v می‌باشد و جواب عمومی آن به‌فرم زیر است :

$$u = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از :

$$y = \frac{1}{\cos x}[AJ_v(x) + BY_v(x)].$$

---

* مثال ۴ . ۷۳. حالت خاصی از فرمول (۱۴) می‌باشد با $v = -1$

توابع بسل پیراسته*

می‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + c^2)y = 0 \qquad (۲۵)$$

را حل کنیم . با توجه به فرمول (۲۱) حالت (ح) و با انتخاب

$$v = 0,\quad a = 1,\quad b^2 = i^2 = -1,\quad (i = \sqrt{-1})$$

داریم ،

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + c^2)y = 0$$

و با توجه به جواب عمومی که با فرمول (۲۴) بیان شده، داریم :

$$y = AJ_c(ix) + BY_c(ix)$$

در نتیجه $J_c(ix)$ یک جواب معادلهٔ (۲۵) می‌باشد ، حال اگر این جواب را در i^{-c} ضرب کنیم $i^{-c}J_c(ix)$ نیز یک جواب معادلهٔ (۲۵) خواهد بود و آنرا با $I_c(x)$ نمایش می‌دهیم

$$(۲۶) \qquad I_c(x) = i^{-c}J_c(ix) = e^{-c\pi i/2}J_c(ix) \quad **$$

تابع $I_c(x)$ را تابع بسل پیراسته نوع اول مرتبهٔ c گویند و داریم

$$(۲۷) \qquad I_c(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+c}\, m!\, \Gamma(m+v+1)} x^{2m+c}$$

و جواب دوم معادلهٔ (۲۵) به‌فرم زیر بیان می‌شود

$$(۲۸) \qquad k_c(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{I_{-c}(x) - I_c(x)}{\sin c\pi}\right], & c \neq 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] \lim\limits_{v \to c} \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\sin v\pi}\right], & c = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$k_c(x)$ ، تابع بسل پیراسته نوع دوم از مرتبه c نامیده می‌شود .

** زیرا می‌دانیم $(\cos Q + i\sin Q)^n = \cos nQ - i\sin nQ$

با انتخاب $c = n$ و $Q = \frac{\pi}{2}$ داریم

$$i^{-c} = \cos\frac{c\pi}{2} - i\sin\frac{c\pi}{2} = e^{-c\pi\frac{i}{2}}$$

* Modified Bessel functions

قضیهٔ ۴ . ۱۸ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$$

به‌فرم زیر بیان می‌شود .

$$y = A I_\nu(x) + B k_\nu(x).$$

مثال ۴ . ۷۵ . نشان دهید .

$$I_{\nu+1}(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) \quad * \qquad (۲۹)$$

حل . می‌دانیم

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

حال اگر در فرمول بالا به‌جای x قرار دهیم ix ، داریم

$$J_{\nu+1}(ix) = -\frac{2\nu i}{x} J_\nu(ix) - J_{\nu-1}(ix)$$

و با استفاده از تعریف $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ داریم

$$i^{\nu+1} I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu i}{x} i^{\nu} I_\nu(x) - i^{\nu-1} I_{\nu-1}(x)$$

یا

$$I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu-1}(x)$$

توابع بسل نوع سوم مرتبهٔ ν یا توابع هانکل اول و دوم مرتبهٔ ν . به‌صورت زیر تعریف می‌شوند .

$$H^{(1)}_\nu(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$$

$$H^{(2)}_\nu(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x)$$

که جوابهایی از معادلهٔ بسل می‌باشند که به‌ازای x های حقیقی ، مختلطند .

---

* فرمول (۲۹) را رابطه بازگشتی ، توابع بسل پیراسته نوع اول گوییم .

مجموعه مسائل ۴ . ۷

۱ . حالت (چ) را اثبات کنید .

۲ . نشان دهید معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + (e^x - k^2) y = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$u = 2 e^{x/2} \quad , \quad e^x = u^2/4$$

قابل تبدیل به معادلهٔ بسل می‌باشد و جواب عمومی به‌فرم زیر بیان می‌شود :

$$y = A J_{2k}(2 e^{x/2}) + B Y_{2k}(2 e^{x/2})$$

۳ . معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید .

آ . $y'' + (e^x - 9) y = 0$

ب . $y'' + (e^x - \frac{1}{4}) y = 0$

پ . $y'' + (e^x - \frac{1}{9}) y = 0$

معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تغییر متغیر داده شده حل کنید .

۴ . $y'' + e^{2x} y = 0 \quad , \quad u = e^x$

۵ . $x^2 y'' + x y' + (9x^2 - 4) y = 0 \quad , \quad z = 3x$

۶ . $x^2 y'' + x y' + (3x^2 - 1) y = 0 \quad , \quad z = \sqrt{3x}$

۷ . $4x^2 y'' + 4x y' + (x - 3) y = 0 \quad , \quad z = x^{1/2}$

۸ . $x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - 8) y = 0 \quad , \quad z = x^2$

۹ . $x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - 1) y = 0 \quad , \quad z = x^2$

۱۰. $xy'' + 5y' + xy = 0 \quad , \quad y = x^{-2}u$

۱۱. $xy'' + 3y' + xy = 0 \quad , \quad y = x^{-1}u$

۱۲. $y'' + (1 - \frac{7}{4x^2})y = 0 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{2}}u$

۱۳. $y'' + (1 - \frac{3}{4x^2})y = 0 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{2}}u$

۱۴. $x^2y'' - 3xy' + 4(x^4 - 3)y = 0 \quad , \quad y = x^2u \; , \; x^2 = z$

۱۵. $x^2y'' - 5xy' + 9(x^6 - 8)y = 0 \quad , \quad y = x^3u \; , \; x^3 = z$

۱۶. $y'' + 2x^2y = 0 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{2}}u \; , \; z = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$

۱۷. $y'' + 9x^4y = 0 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{2}}u \; , \; z = x^3$

۱۸. $y'' + 16xy = 0 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{2}}u \; , \; z = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$

۱۹. $x^2y'' - 3xy' + (36x^6 - 5)y = 0 \quad , \quad y = x^2u \; , \; z = 2x^3$

۲۰. $x^2y'' - xy' + (36x^4 - 15)y = 0 \quad , \quad y = xu \; , \; z = 3x^2$

۲۱. جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید

آ. $x^2y'' + xy' - (x^2 + 4)y = 0$

ب. $x^2y'' + xy' - (x^2 + 1)y = 0$

فصل پنجم

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

فرض می‌کنیم y_1 و y_2 و ... و y_n توابعی از یک متغیر مستقل مانند x باشند، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوییم، اگر هریک از معادلات دستگاه، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی باشد، در این فصل طریق حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت را ارائه می‌دهیم و برای این منظور دو روش را بررسی می‌کنیم، روش حذفی و روش اپراتوری.

آ: روش حذفی

در این روش با حذف کردن تابعهای مجهول و مشتقات این توابع، معادله‌ای بدست می‌آوریم که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد و با حل این معادله، یکی از توابع مجهول بدست می‌آید و سپس سایر تابعهای مجهول را بدست می‌آوریم. روش حل در مثالهای زیر ارائه می‌شود.

مثال ۱۰۵. دستگاه معادلات

$$\begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 6y_2 \end{array} \right. \qquad (1)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلاً (a) یکبار مشتق می‌گیریم

$$y_1'' = 2y_1' - 5y_2' \qquad (2)$$

سپس از همین معادله (معادله‌ای که مشتق آنرا گرفته‌ایم)، y_2 را حساب می‌کنیم

$$y_2 = \frac{2}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_1' \qquad (۳)$$

در (۲) به‌جای y_2'، (b) را قرار می‌دهیم و به‌جای y_2 در (b)، (۳) را می‌گذاریم داریم:

$$y_1'' = 2y_1' - 5\left(5y_1 - 6\left(\frac{2}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_1'\right)\right)$$

$$= -4y_1' - 13y_1 \qquad (۴)$$

(۴) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت می‌باشد.

$$y_1'' + 4y_1' + 13y_1 = 0 \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵) را حل می‌کنیم و y_1 را بدست می‌آوریم

$$t^2 + 4t + 13 = 0 \quad , \quad t = -2 \pm 3i$$

$$y_1 = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \qquad (۶)$$

حال y_1 و y_1' را در (۳) قرار می‌دهیم و y_2 را پیدا می‌کنیم

$$y_1' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-2x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$$

$$y_2 = \frac{1}{5} e^{-2x}((4C_1 - 3C_2)\cos 3x + (3C_1 + 4C_2)\sin 3x)$$

مثال ۵ . ۲ . دستگاه معادلات

$$\begin{array}{ll} (a) & \left\{ \begin{array}{l} y_1'' = y_2 + 1 \\ y_2'' = y_1 + x \end{array} \right. \\ (b) & \end{array} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلاً (a) دو بار مشتق می‌گیریم، داریم،

$$y_1^{(4)} = y_2'' \qquad (۲)$$

و از معادلهٔ (a) داریم

$$y_2 = y_1'' - 1 \qquad (۳)$$

در (۲) به‌جای y_2''، (b) را قرار می‌دهیم

$$y_1^{(4)} = y_1 + x$$

$$y_1^{(4)} - y_1 = x \qquad (۴)$$

با حل (۴)، y_1 را پیدا می‌کنیم

$$y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x \qquad (۵)$$

با دو بار مشتقگیری از (۵)، y_1'' را حساب می‌کنیم و در (۳) قرار می‌دهیم، داریم:

$$y_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x - 1$$

مثال ۵ . ۳ . دستگاه معادلات

$$\begin{array}{ll} (a) & \left\{ \begin{array}{l} y_1' + 4y_1 - 4y_2 = 12 \\ 10y_2' - 4y_1' + 4y_2 = 0 \end{array} \right. \\ (b) & \end{array} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. از معادلهٔ (a) یکبار مشتق می‌گیریم

$$y_1'' + 4y_1' = 4y_2' \qquad (۲).$$

از طرفی از معادلهٔ (a)، داریم

$$y_2 = \frac{1}{4}y_1' + y_1 - 3 \qquad (۳)$$

در (۲) به‌جای y_2' از (b) و به‌جای y_2 از (۳) مقدار می‌گذاریم

$$y_1'' + 4y_1' = \frac{4}{10}\left[4y_1' - 4\left(\frac{1}{4}y_1' + y_1 - 3\right)\right]$$

$$y_1'' + \frac{14}{5}y_1' + \frac{8}{5}y_1 = \frac{24}{5} \qquad (۴)$$

(۴) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت می‌باشد و با حل آن داریم

$$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{4}{5}x} + 3 \qquad (۵)$$

از (۵) یک بار مشتق می‌گیریم تا y_1' بدست آید، و با جایگذاری y_1 و y_1' در (۳)، y_2 پیدا می‌شود.

$$y_2 = \frac{1}{2}c_1 e^{-2x} + \frac{4}{5}c_2 e^{-\frac{4}{5}x}$$

مثال ۵ . ۴ . دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 + 4y_2 = e^x & (a) \\ y_2'' - y_1 - 3y_2 = -x & (b) \end{cases} \qquad (۱)$$

را حل کنید .

حل . ابتدا از معادلهٔ (a) دو بار مشتق می‌گیریم

$$y_1^{(4)} + 2y_1'' + 4y_2'' = e^x \qquad (۲)$$

و از (a) داریم

$$y_2 = -\frac{1}{4}y_1'' - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}e^x \qquad (۳)$$

در (۲) به‌جای y_2'' از (b) و به‌جای y_2 ، (۳) را قرار می‌دهیم ، داریم

$$y_1^{(4)} + 2y_1'' + 4(y_1 - x + \frac{3}{4}(-y_1'' - 2y_1 + e^x)) = e^x$$

$$y_1^{(4)} - y_1'' - 2y_1 = 4x - 2e^x$$

$$t^4 - t^2 - 2 = (t^2+1)(t^2-2) = 0 \ , \ t = \pm i \ , \ \pm\sqrt{2}$$

$$y_1 = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^x - 2x \qquad (۴)$$

با جایگذاری y_1'' و y_1 در (۳) داریم :

$$y_2 = -C_1 e^{x\sqrt{2}} - C_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{C_3}{4}\cos x - \frac{C_4}{4}\sin x - \frac{1}{2}e^x + x$$

ب . روش اپراتورها

مثال ۵ . ۵ . دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dot{x} - 2x - 3y = 2e^{2t} & (a) \\ -x + \dot{y} - 4y = 3e^{2t} & (b) \end{cases} \qquad (۱)$$

را حل کنید . (x و y تابع t هستند و نقطه‌ها نشان‌دهنده مشتق نسبت به t می‌باشند)

حل . با استفاده از نماد $D = \frac{d}{dt}$ داریم .

$$\begin{cases} (D-2)x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + (D-4)y = 3e^{2t} \end{cases}$$

با استفاده از دستور کرامر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & -3 \\ 3e^{2t} & D-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & -3 \\ -1 & D-4 \end{vmatrix}} = \frac{4e^{2t} - 8e^{2t} + 9e^{2t}}{D^2 - 6D + 5}$$

$$= \frac{5e^{2t}}{D^2 - 6D + 5}$$

$$(D^2 - 6D + 5)x = 5e^{2t} \qquad (۲)$$

و با حل (۲) داریم :

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t} \qquad (۳)$$

به‌همین ترتیب

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & 2e^{2t} \\ -1 & 3e^{2t} \end{vmatrix}}{D^2 - 6D + 5} = \frac{2e^{2t}}{D^2 - 6D + 5}$$

$$(D^2 - 6D + 5)y = 2e^{2t} \qquad (۴)$$

و

$$y = Ae^t + Be^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t} \qquad (۵)$$

c_1 و c_2 و A و B مستقل نیستند و می‌توان دو تای آنها را برحسب دو تای دیگر بدست آورد بدین ترتیب که مثلاً" با جایگذاری x و $\dot{x}$ و y در (a) داریم

$$c_1e^t + 5c_2e^{5t} - \frac{10}{3}e^{2t} - 2c_1e^t - 2c_2e^{5t} + \frac{10}{3}e^{2t} - 3Ae^t - 3Be^{5t} + 2e^{2t} \equiv 2e^{2t}$$

$$\begin{cases} -c_1 - 3A = 0 \\ 3c_2 - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -3A \ , \ c_2 = B$$

و جوابها به‌فرم زیر می‌باشند :

$$x = -3Ae^{t} + Be^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t}$$

$$y = Ae^{t} + Be^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t}.$$

تذکر. تعداد پارامترهای ثابت و مستقل برابر است با بزرگترین درجه، دترمینان ضرایب.

مثال ۵ . ۶ . دستگاه معادلات

$$\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \quad \begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x + \ddot{y} + y = e^{t} \\ \ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} = e^{-t} \end{cases}$$

را حل کنید .

حل . ابتدا دستگاه را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} (D^2 + D + 1)x + (D^2 + 1)y = e^{t} \\ (D^2 + D)x + D^2 y = e^{-t} \end{cases}$$

و با استفاده از دستور کرامر داریم :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^{t} & D^2 + 1 \\ e^{-t} & D^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 + 1 \\ D^2 + D & D^2 \end{vmatrix}} = \frac{e^{t} - 2e^{-t}}{-D}$$

$$Dx = -e^{t} + 2e^{-t}$$

$$x = -e^{t} - 2e^{-t} + c_1$$

و

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & e^{t} \\ D^2 + D & e^{-t} \end{vmatrix}}{-D} = -\frac{e^{-t} - 2e^{t}}{D}$$

$$Dy = 2e^{t} - e^{-t}$$

$$y = 2e^{t} + e^{-t} + c_2$$

و چون دترمینان ضرایب از درجهٔ ۱ می‌باشد، لذا c_1 و c_2 مستقل نیستند و یکی برحسب دیگری بیان می‌شود x و $\ddot{x}$ و $\dot{x}$ و y و $\ddot{y}$ را در (a) قرار می‌دهیم، داریم

$$-e^{t} - 2e^{-t} - e^{t} + 2e^{-t} - e^{t} - 2e^{-t} + c_1 + 2e^{t} + e^{-t} + 2e^{t} + e^{-t} + c_2 \equiv e^{t}$$

$$c_1 + c_2 = 0 \ , \ c_1 = -c_2$$

و جوابها به‌فرم زیر می‌باشند :

$$x = -e^{t} - 2e^{-t} + c_1$$

$$y = 2e^{t} + e^{-t} - c_1$$

مثال ۵ . ۷ . دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y - x = e^{t} + 1 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + z + 2y = e^{t} + 2 \\ \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt} - x + z = e^{t} + 3 \end{cases}$$

را حل کنید .

حل . ابتدا دستگاه را به‌فرم اپراتوری می‌نویسیم

$$\begin{cases} (D-1)x + (D+2)y = e^{t} + 1 \\ (D+2)y + (D+1)z = e^{t} + 2 \\ (D-1)x + (D+1)z = e^{t} + 3 \end{cases}$$

و سپس دترمینان ضرایب را حساب می‌کنیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & D+2 & 0 \\ 0 & D+2 & D+1 \\ D-1 & 0 & D+1 \end{vmatrix} = 2(D+2)(D+1)(D-1)$$

و با استفاده از دستور کرامر

$$x=\frac{\begin{vmatrix} e^t+1 & D+2 & 0 \\ e^t+2 & D+2 & D+1 \\ e^t+3 & 0 & D+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)}=\frac{e^t+2}{2(D-1)}$$

$$\frac{dx}{dt}-x=1+\frac{1}{2}e^t \qquad (۲)$$

و (۲) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول می‌باشد و جواب عمومی (۲) به‌فرم زیر است:

$$x=\frac{t}{2}e^t-1+c_1e^t \qquad (۳)$$

و

$$y=\frac{\begin{vmatrix} D-1 & e^t+1 & 0 \\ 0 & e^t+2 & D+1 \\ D-1 & e^t+3 & D+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)}=\frac{e^t}{2(D+2)}$$

$$\frac{dy}{dt}+2y=\frac{1}{2}e^t$$

$$y=\frac{1}{6}e^t+c_2e^{-2t} \qquad (۴)$$

و

$$z=\frac{\begin{vmatrix} D-1 & D+2 & e^t+1 \\ 0 & D+2 & e^t+2 \\ D-1 & 0 & e^t+3 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)}=\frac{e^t+4}{2(D+1)}$$

$$\frac{dz}{dt}+z=\frac{1}{2}e^t+2$$

$$z=\frac{1}{4}e^t+2+c_3e^{-t} \qquad (۵)$$

(۳)، (۴) و (۵) جواب دستگاه می‌باشند و c_1 و c_2 و c_3 مستقل از یکدیگرند، زیرا بزرگترین درجه D در Δ برابر ۳ می‌باشد.

مثال ۵ . ۸ . دستگاه معادلات همگن

$$\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\begin{cases}\dot{x}-3x-4y=0\\ \dot{y}+3y-4x=0\end{cases} \qquad (۱)$$

را حل کنید.

حل. ابتدا دستگاه را به‌فرم اپراتوری می‌نویسیم

$$\begin{cases}(D-3)x-4y=0\\ -4x+(D+3)y=0\end{cases} \qquad (۲)$$

بر طبق دستور کرامر

$$\Delta x=\Delta_1 \quad , \quad \Delta y=\Delta_2$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}=D^2-25$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & D+3 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} D-3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

با توجه به مقادیر فوق داریم:

$$(D^2-25)x=0 \Rightarrow x=c_1e^{5t}+c_2e^{-5t} \qquad (۳)$$

$$(D^2-25)y=0 \Rightarrow y=A_1e^{5t}+A_2e^{-5t} \qquad (۴)$$

c_1، c_2، A_1 و A_2 مستقل نیستند و چون بزرگترین درجه D در دترمینان Δ برابر ۲ می‌باشد، لذا می‌بایست ۲ تای از پارامترها را برحسب دو تای دیگر بنویسیم، برای اینکار x و $\dot{x}$ را در (a) قرار می‌دهیم

$$\dot{x} = 5\,c_1\,e^{5t} - 5\,c_2\,e^{-5t}$$

$$5\,c_1\,e^{5t} - 5\,c_2\,e^{-5t} - 3\,c_1\,e^{5t} - 3\,c_2\,e^{-5t} - 4\,A_1\,e^{5t} - 4\,A_2\,e^{-5t} = 0$$

$$\begin{cases} 2\,c_1 - 4\,A_1 = 0 \\ -8\,c_2 - 4A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 2\,A_1 \\ c_2 &= -\frac{1}{2}\,A_2 \end{aligned}$$

و جواب عمومی دستگاه (۱) به‌فرم زیر می‌باشد :

$$x = 2\,A_1\,e^{5t} - \frac{1}{2}A_2\,e^{-5t}$$

$$y = A_1\,e^{5t} + A_2\,e^{-5t}$$

مجموعه مسائل فصل ۵

دستگاه‌های معادلات زیر را حل کنید .

۱. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4\,y_1 - 2\,y_2 \end{cases}$

۲. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 2\,e^x \\ y_2' = 4\,y_1 + y_2 - e^x \end{cases}$

۳. $\begin{cases} y_1' = 4\,y_1 - 2\,y_2 + 2\,x \\ y_2' = 8\,y_1 - 4\,y_2 + 1 \end{cases}$

۴. $\begin{cases} y_1' = 3\,y_1 - 2\,y_2 - e^{-x}\sin x \\ y_2' = 4\,y_1 - y_2 + 2\,e^{-x}\cos x \end{cases}$

۵. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5\,y_2 \\ y_2' = 2\,y_1 - 5\,y_2 \end{cases} , \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned}$

۶. $\begin{cases} (D^2 - 3D + 2)\,y_1 + (D - 1)\,y_2 = 0 \\ (D - 2)\,y_1 + (D + 1)\,y_2 = 0 \end{cases}$

۷. $\begin{cases} (2D + 1)\,y_1 + D\,y_2 = x \\ (D - 1)\,y_1 + D\,y_2 = 2 \end{cases}$

۸. $\begin{cases} (D^2 + D + 1)\,y_1 + (D^2 + 1)\,y_2 = e^x \\ (D^2 + D)\,y_1 + D^2\,y_2 = e^{-x} \end{cases}$

فصل ششم

۶

تبدیل لاپلاس

این فصل را به بحث دربارهٔ حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه، اختصاص می‌دهیم . و برای حل این‌گونه معادلات ، روش تبدیل لاپلاس را معرفی می‌کنیم و کاربرد آن را در حل معادلات دیفرانسیل معمولی مورد بررسی قرار می‌دهیم . و متذکر می‌شویم که از روش تبدیل لاپلاس، نیز می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده کرد .

در فصل سوم این کتاب به روش ارائه شده برای حل این نوع معادلات آشنا شدیم ؛ به این ترتیب : که ابتدا معادلهٔ همگن متناظر را حل کرده، سپس یک جواب خصوصی‌معادله را پیدا می‌کردیم . آنگاه از جمع دو جواب ، به جواب عمومی می‌رسیدیم و جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار می‌دادیم تا جواب خصوصی معادله بدست آید . ولیکن امتیاز و حسن روش تبدیل لاپلاس در این است که به جواب خصوصی معادله ، مستقیما" دست می‌یابیم .

برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با این روش، سه مرحلهٔ اصلی زیر را اعمال می‌داریم :

مرحلهٔ اول . معادلهٔ دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لاپلاس، به یک معادلهٔ جبری درجه اول تبدیل می‌کنیم ؛

مرحله دوم . جواب معادله جبری را بدست می‌آوریم ؛

مرحله سوم . با استفاده از تبدیل معکوس از جواب مرحلهٔ دوم ، جواب معادلهٔ اصلی را پیدا می‌کنیم .

۶.۱. تبدیل لاپلاس

تعریف ۶.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t \geq 0$ تعریف شده، با نماد $F(s)$ یا $\mathcal{L}[f(t)]$ نمایش داده می‌شود، و عبارتست از:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (1)$$

اگر این انتگرال موجود باشد*.
تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامیم، و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ گوییم و آنرا با نماد $\mathcal{L}^{-1}(F)$ نمایش می‌دهیم.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$$

تبدیل لاپلاس توابع را همیشه با حرف بزرگ متناظر نشان می‌دهیم، یعنی تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ را با $G(s)$ و تبدیل لاپلاس تابع $h(t)$ را با $H(s)$ و...

قضیه ۶.۱. *تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی است.*
فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند. آنگاه

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1\, \mathcal{L}(f_1(t)) + c_2\, \mathcal{L}(f_2(t)) \qquad (2)$$

اثبات.

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\,dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt$$

$$= c_1\, \mathcal{L}(f_1(t)) + c_2\, \mathcal{L}(f_2(t)).$$

قضیه ۶.۲. *معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی است.*
فرض کنید $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ و $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1\, \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2\, \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] \qquad (3)$$

---

* $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\,dt$

اثبات. بنابر قضیه ۶.۱ داریم

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

و بنا بر تعریف

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

از طرفی

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} F_1(s) \quad , \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} F_2(s)$$

پس

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1\, \mathcal{L}^{-1}(F_1(s)) + c_2\, \mathcal{L}^{-1}(F_2(s)).$$

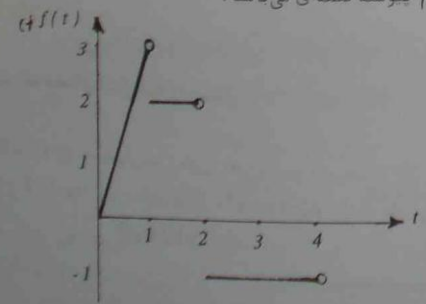
قبل از بیان قضیه وجود تبدیل لاپلاس یک تابع، به بیان دو تعریف می‌پردازیم:

تعریف ۶.۲. تابع $f(t)$ را روی فاصله I **پیوسته قطعه‌ای*** گوییم، اگر بتوان این فاصله را به تعداد محدودی زیر فاصله تقسیم کرد، بطوری‌که
آ. تابع $f(t)$ روی هر زیرفاصله باز، پیوسته باشد.
ب. تابع $f(t)$ در تمام نقاط این زیرفاصله‌ها دارای حد چپ و حد راست باشد.

مثال ۶.۱. تابع $f(t)$ که بصورت زیر تعریف شده است.

$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{اگر} \quad 0 < t < 1 \\ 2 & \text{اگر} \quad 1 \leq t < 2 \\ -1 & \text{اگر} \quad 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

روی فاصله $(0,4)$ پیوسته قطعه‌ای می‌باشد.

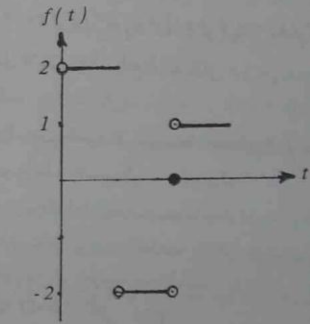


شکل ۶.۱

مثال ۶ . ۲ . تابع

$$f(t)=\begin{cases} 2 & \text{اگر} \quad 0<t<1 \\ -2 & \text{اگر} \quad 1<t<2 \\ 0 & \text{اگر} \quad t=2 \\ 1 & \text{اگر} \quad 2<t\leqslant 3 \end{cases}$$

روی فاصله $[0,3]$ پیوستهٔ قطعه‌ای است . همانطور که ملاحظه می‌کنید $f(1)$ تعریف نشده و مقدار تابع در نقطه $t=2$ برابر با حد چپ و یا حد راست در این نقطه نیست .



شکل ۶ . ۲

تذکر ۱ . توابع پیوسته زیرمجموعهٔ توابع پیوستهٔ قطعه‌ای می‌باشند ؛ زیرا تعداد نقاط انفصالشان صفر است .

تذکر ۲ . توابع پیوسته قطعه‌ای انتگرالپذیر هستند .

تعریف ۶ . ۳ . تابع $f(t)$ ، هم‌مرتبه نمایی e^{at} نامیده می‌شود ، اگر بتوان مقادیر ثابت و نامنفی M و T را پیدا کرد ، بطوری که برای هر $t\geqslant T$ داشته باشیم .

$$|f(t)|\leqslant Me^{at} \qquad (۴)$$

* Piecewise continuous

مثال ۶ . ۳ . توابع $\sin t$ و $\cos t$ هم‌مرتبه نمایی "۱" هستند $(a=0)$ و تابع e^{bt} هم‌مرتبه نمایی e^{at} می‌باشد $(b\leqslant a)$.

قضیهٔ ۶ . ۳ . قضیه وجود تبدیل لاپلاس

اگر تابع $f(t)$ دارای شرایط زیر باشد :

آ . در هر فاصله محدود $0\leqslant t\leqslant T$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد ؛

ب . برای $t>T$ ، هم‌مرتبه نمایی e^{at} باشد ؛

آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برای تمام $s>a$ موجود می‌باشد .

اثبات .

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

چون تابع $f(t)$ در فاصله $0\leqslant t\leqslant T$ پیوستهٔ قطعه‌ای می‌باشد ، بنابراین $e^{-st}f(t)$ نیز در فاصله $0\leqslant t\leqslant T$ پیوستهٔ قطعه‌ای است و $\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ موجود خواهد بود .

$$|\mathcal{L}(f(t))|=\left|\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|$$
$$\leqslant\left|\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\right|+\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|$$

حال نشان می‌دهیم که $\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ نیز موجود است .

$$\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|\leqslant\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$$
$$\leqslant\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$$
$$\leqslant M\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt$$
$$=\frac{M}{s-a}\quad , \quad s>a$$

تذکر ۳ . شرایط قضیه فوق کافی است و لازم نیست . یعنی توابعی وجود دارند که در شرایط قضیه ۶ . ۳ . صدق نمی‌کنند ولی تبدیل لاپلاس این توابع وجود دارد .

قضیه ۶ . ۴ . اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه ۶ . ۳ . صدق کند ، آنگاه

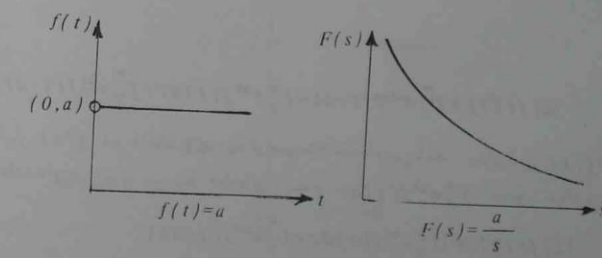
$$\lim F(s)=0$$

یعنی اگر $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$. آنگاه $f(t)$ نمی‌تواند دارای شرایط قضیهٔ ۶ . ۳ باشد .

مثال ۶ . ۴. تبدیل لاپلاس $f(t)=5$ را پیدا کنید .

حل .
$$\mathcal{L}(5)=\int_0^\infty 5e^{-st}dt=\frac{-5}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{5}{s}$$

و بطور کلی اگر $f(t)=a$ آنگاه $\mathcal{L}(a)=\frac{a}{s}$



شکل ۶ . ۳

مثال ۶ . ۵. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=3t$ را پیدا کنید .

حل .
$$\mathcal{L}(3t)=3\int_0^\infty e^{-st}t\,dt=3\frac{te^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty+\frac{3}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$
$$=\frac{3}{s^2}$$

مثال ۶ . ۶. تبدیل لاپلاس $f(t)=t^a$ را بدست آورید . $a>-1$

حل .
$$\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty e^{-st}t^a dt$$

با فرض
$$st=y \Rightarrow s\,dt=dy$$
$$\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{s}\right)^a\frac{dy}{s}$$
$$=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-y}y^a\,dy=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

مثال ۶ . ۷. تبدیل لاپلاس $f(t)=t^4$ را پیدا کنید .

حل .
$$\mathcal{L}(t^4)=\frac{\Gamma(4+1)}{s^5}=\frac{4!}{s^5}$$

مثال ۶ . ۸. تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید .
$$f(t)=3t^3-4t+2$$

حل .
$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(3t^3-4t+2)$$
$$=3\mathcal{L}(t^3)-4\mathcal{L}(t)+2\mathcal{L}(1)$$
$$=3\frac{3!}{s^4}-\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s}.$$

مثال ۶ . ۹. تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{at}$ را پیدا کنید .

حل .
$$\mathcal{L}(e^{at})=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$
$$=\frac{1}{s-a}\quad,\quad s>a$$

مثال ۶ . ۱۰. تبدیل لاپلاس توابع $\sin at$ و $\cos at$ را پیدا کنید .

حل . می‌دانیم

$$e^{iat} = \cos at + i \sin at$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(\cos at) + i\,\mathcal{L}(\sin at) = \mathcal{L}(e^{iat})$$

از طرفی

$$\mathcal{L}(e^{iat}) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

پس

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

و

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال ۶ . ۱۱ . تبدیل لاپلاس $f(t) = \cosh at$ را پیدا کنید .

حل . می‌دانیم

$$\cosh at = \frac{1}{2}\,(e^{at} + e^{-at})$$

از طرفین رابطه بالا لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\,(\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at}))$$

$$= \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

و با اثبات مشابه داریم

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

نتایج مثالهای فوق را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم و برای حل مسائل از جدول کمک می‌گیریم

جدول (۱)

$f(t)$	$F(s)$
$k\cos at$	$k\,\frac{s}{s^2+a^2}\ ,\ s>0$
$k\sin at$	$k\,\frac{a}{s^2+a^2}\ ,\ s>0$
$k\cosh at$	$k\,\frac{s}{s^2-a^2}\ ,\ s>\lvert a\rvert$
$k\sinh at$	$k\,\frac{a}{s^2-a^2}\ ,\ s>\lvert a\rvert$

$f(t)$	$F(s)$
a	$\frac{a}{s}\ ,\ s>0$
at^n	$a\,\frac{n!}{s^{n+1}}\ ,\ s>0$
$kt^a\ ,\ a>-1$	$k\,\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\ ,\ s>0$
ke^{at}	$\frac{k}{s-a}\ ,\ s>a$

مثال ۶ . ۱۲ . تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید .

$$f(t) = 4t^2 - 2\cos 3t + 5e^{-t} - 3\sinh 2t + 1$$

حل .

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{8}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s+1} - \frac{6}{s^2-4} + \frac{1}{s}\,.$$

مثال ۶ . ۱۳ . تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید .

$$F(s) = \frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)}$$

حل .

$$\frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{cs+D}{s^2+1}$$

$$5s-1 \equiv A(s-1)(s^2+1) + Bs(s^2+1) + cs^2(s-1) + Ds(s-1)$$

به ازای $s=0$ $\quad -1=-A \Rightarrow A=1$

به ازای $s=1$ $\quad 4=2B \Rightarrow B=2$

به ازای $s=-1$ $\quad -6=-4-4-2C+2D$

به ازای $s=2$ $\quad 9=5+20+4C+2D$

از دو معادله آخر داریم $C=-3$ و $D=-2$. پس

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}-\frac{3s+2}{s^2+1}$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s})+2\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-1}-3\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+1}-2\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1}$$

$$=1+2e^t-3\cos t-2\sin t.$$

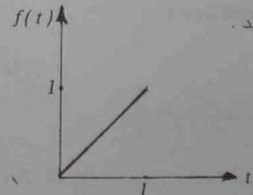
مثال ۶.۱۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}(t^{-1/2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{1/2}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\quad ,\ s>0$$

مثال ۶.۱۵. تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر}\ 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0 & \text{اگر}\ t>1 \end{cases}$$



شکل ۱۵.۶

حل.

$$\mathcal{L}(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^1 t\,e^{-st}\,dt+\int_1^\infty 0\,dt$$

$$=\frac{t\,e^{-st}}{-s}\Big|_0^1-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}$$

مثال ۶.۱۶. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2-2}$$

حل.

$$F(s)=\frac{s}{s^2-2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{s^2-2}$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}F(s)=\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2-2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{s^2-2}$$

$$=\cosh\sqrt{2}t+\frac{3}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t.$$

مثال ۶.۱۷. تبدیل معکوس تابع $F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4}$ را پیدا کنید.

حل.

$$F(s)=2\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s)=2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t.$$

مثال ۶.۱۸. تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t)=\sin(3t+\frac{\pi}{4})$$

حل.

$$f(t)=\sin 3t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 3t\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathcal{L}(\sin 3t)+\mathcal{L}(\cos 3t))$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{3}{s^2+9}+\frac{s}{s^2+9})$$

قضیه ۶.۵. اگر $s>a$ و $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$، آنگاه برای $b>0$،

$$\mathcal{L}(f(bt))=\frac{1}{b}F(\frac{s}{b})\quad ,\ \frac{s}{b}>a \qquad (۵)$$

و

$$\mathcal{L}^{-1} F(ks) = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \qquad (۶)$$

اثبات. طبق تعریف $F(s)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

بنابراین

$$F\left(\frac{s}{b}\right)=\int_0^\infty e^{-\frac{st}{b}} f(t)\,dt$$

با فرض $u=\frac{t}{b}$ داریم

$$F\left(\frac{s}{b}\right)=\int_0^\infty e^{-su} f(bu)\,b\,du = b\,\mathcal{L}f(bt).$$

مثال ۶ . ۱۹. اگر $\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)=Ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(t)=\frac{1-e^{-2t}}{2t}$$

حل. بنا بر فرمول (۵)

$$\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-2t}}{2t}\right)=\frac{1}{2}\,Ln\left(1+\frac{2}{s}\right).$$

مثال ۶ . ۲۰. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s)=\frac{1}{4s^2+9}$$

حل. طبق فرمول (۶) داریم $k=2$ پس

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{4s^2+9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t/2$$

مجموعه مسائل ۶ . ۱

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

۱. $f(t)=5t^4-3t^2+6$

۲. $f(t)=4e^{3t}+2\cos t-1$

۳. $f(t)=\cos(at+b)$

۴. $f(t)=\sinh(at+b)$

۵. $f(t)=3t-\cosh 2t+\sin 3t$

۶. $$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } 0\leqslant t<1 \\ t & \text{اگر } t\geqslant 1 \end{cases}$$

۷. $$f(t)=\begin{cases} \sin 3t & \text{اگر } 0\leqslant t<\pi \\ 3 & \text{اگر } t\geqslant \pi \end{cases}$$

۸. $f(t)=2t^{3/2}+\sinh t-3$

در تمرینات زیر $f(t)$ را پیدا کنید:

۹. $F(s)=\frac{2}{s^4}+s^{-5/2}$

۱۰. $F(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}$

۱۱. $F(s)=\frac{2-s}{3s^{3/2}}$

۰۱۲ $$F(s)=\frac{1}{s^3}+\frac{4s}{s^2-1}+\frac{3}{s^2+4}$$

۰۱۳ $$F(s)=\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$$

۶.۲. تبدیل لاپلاس مشتق

قضیه ۶.۶. اگر $f(t)$ تابعی پیوستهٔ قطعه‌ای روی $t\geqslant 0$ باشد و هم‌مرتبهٔ نمایی e^{at} با $a>0$ و اگر $f'(t)$ تابعی پیوستهٔ قطعه‌ای روی $t\geqslant 0$، آنگاه*

$$(۱)\quad \mathcal{L}(f'(t))=s\,\mathcal{L}(f(t))-f(0^+)-\sum_{i=1}^{n}e^{-sT_i}[f(T_i^{+})-f(T_i^{-})]$$

برای $s>a$ و $f(t)$ در نقاط $t=T_1, T_2, \dots, T_n$ منفصل می‌باشد.

قضیه را برای حالتی که $f(t)$ پیوسته و $f'(t)$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد اثبات می‌کنیم.

اثبات.

$$\mathcal{L}(f'(t))=\int_0^{\infty}e^{-st}f'(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt$$

تابع $f(t)$ در فاصله $[0,T]$ پیوسته است و مشتق آن در این فاصله پیوستهٔ قطعه‌ای. حال فرض می‌کنیم که $f'(t)$ در نقاط T_1 و T_2 و ... و T_n منفصل باشد.

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt=\int_0^{T_1}e^{-st}f'(t)\,dt+\int_{T_1}^{T_2}e^{-st}f'(t)\,dt+\dots+\int_{T_n}^{T}e^{-st}f'(t)\,dt$$

انتگرالهای طرف راست را با استفاده از روش جزء به‌جزء محاسبه می‌کنیم،

$$f'(t)\,dt=dV \Rightarrow V=f(t)$$
$$e^{-st}=u \Rightarrow -se^{-st}dt=du$$

پس

* $\lim\limits_{t\to T_i^-} f(t)=f(T_i^-)\ ,\ \lim\limits_{t\to T_i^+} f(t)=f(T_i^+)$

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^{T_1}+s\int_0^{T_1}e^{-st}f(t)\,dt$$
$$+e^{-st}f(t)\Big|_{T_1}^{T_2}+s\int_{T_1}^{T_2}e^{-st}f(t)\,dt+\dots+e^{-st}f(t)\Big|_{T_n}^{T}+s\int_{T_n}^{T}e^{-st}f(t)\,dt$$

چون $f(t)$ تابعی پیوسته می‌باشد، بنابراین در هر نقطه حد چپ و حد راست برابر می‌باشند. یعنی

$$\lim_{t\to T_1^+}f(t)=\lim_{t\to T_1^-}f(t),\dots,\lim_{t\to T_n^+}f(t)=\lim_{t\to T_n^-}f(t)$$

و در نتیجه داریم

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt=-f(0^+)+\lim_{T\to\infty}e^{-sT}f(T)+s\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

از طرفی $\lim\limits_{T\to\infty}e^{-sT}f(T)$ برابر صفر است، زیرا $f(t)$ در شرایط قضیهٔ وجود صدق می‌کند، و داریم

$$(۲)\qquad \mathcal{L}(f'(t))=s\,\mathcal{L}(f)-f(o^+).$$

قضیه ۶.۷. فرض کنیم $f(t)$ و $f'(t)$ و ... و $f^{(n-1)}(t)$ توابعی پیوسته به‌ازای $t\geqslant 0$ باشند و در شرایط قضیهٔ وجود صدق کنند و $f^{(n)}(t)$ به‌ازای $t\geqslant 0$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، آنگاه

$$(۳)\ \mathcal{L}(f^{(n)}(t))=s^n\mathcal{L}(f(t))-s^{n-1}f(o^+)-s^{n-2}f'(o^+)\dots-f^{(n-1)}(o^+)$$

و به‌ازای $n=۲$ و $n=۳$ داریم

$$(۴)\qquad \mathcal{L}(f''(t))=s^2\mathcal{L}(f(t))-sf(o^+)-f'(o^+)$$

$$(۵)\qquad \mathcal{L}(f'''(t))=s^3\mathcal{L}(f(t))-s^2f(o^+)-sf'(o^+)-f''(o^+).$$

مثال ۶.۲۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t$ را پیدا کنید.

حل.

$$f'(t)=1\ ,\ f(0)=0$$

طبق فرمول (۲) داریم،

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}=s\mathcal{L}(t)-0 \Rightarrow \mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}.$$

مثال ۶ . ۲۲ . تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\sin t$ را پیدا کنید .

حل . $f'(t)=\cos t$ و $f''(t)=-\sin t$ و $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

از طرفی طبق فرمول (۴) داریم .

$$\mathcal{L}(-\sin t)=-\mathcal{L}(\sin t)=s^2\mathcal{L}(\sin t)-0-1$$

و

$$\mathcal{L}(\sin t)=\frac{1}{1+s^2}$$

مثال ۶ . ۲۳ . تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^t$ را پیدا کنید .

حل . $f'(t)=e^t \quad , \quad f(0)=1$

و طبق فرمول (۲) داریم .

$$\mathcal{L}(e^t)=s\mathcal{L}(e^t)-1$$

$$\mathcal{L}(e^t)=\frac{1}{s-1}$$

مثال ۶ . ۲۴ . تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t\cos 2t$ را پیدا کنید .

حل . $f'(t)=\cos 2t-2t\sin 2t$ و $f''(t)=-4\sin 2t-4t\cos 2t$

$$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=1$$

و طبق فرمول (۴) داریم .

$$\mathcal{L}(f'')=-4\mathcal{L}(\sin 2t)-4\mathcal{L}(t\cos 2t)=s^2\mathcal{L}(t\cos 2t)-1$$

و

$$(s^2+4)\mathcal{L}(t\cos 2t)=1-\frac{8}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(t\cos 2t)=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

مثال ۶ . ۲۵ . تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\cos^2 t$ را حساب کنید .

حل . $f'(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t \quad , \quad f(0)=1$

و طبق فرمول (۲) داریم ،

$$\mathcal{L}(-\sin 2t)=s\mathcal{L}(\cos^2 t)-1$$

$$s\mathcal{L}(\cos^2 t)=1-\frac{2}{s^2+4}=\frac{s^2+2}{s^2+4}$$

و

$$\mathcal{L}(\cos^2 t)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

مثال ۶ . ۲۶ . تبدیل لاپلاس تابع زیر را با استفاده از فرمول (۱) بدست آورید .

$$f(t)=\begin{cases} 2t & \text{اگر} \quad 0\leq t\leq 1 \\ t & \text{اگر} \quad t>1\end{cases}$$

حل .

$$f'(t)\begin{cases} 2 & \text{اگر} \quad 0\leq t<1 \\ 1 & \text{اگر} \quad t>1 ,\end{cases}$$

$$f(0)=0 \ , \ \lim_{t\to 1^+}=1 \ , \ \lim_{t\to 1}=2$$

و طبق فرمول (۱) داریم

$$\mathcal{L}(f'(t))=\boxed{s\mathcal{L}(f(t))}-f(0)-e^{-s}(f(1^+)-f(1^-))$$

و

$$s\mathcal{L}(f(t))=2\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^\infty e^{-st}dt+e^{-s}(1-2)$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}$$

و

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{2}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}$$

مثال ۶ . ۲۷ . معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید .

$$y''-2y'-3y=0 \ , \ y(0)=1 \ , \ y'(0)=7$$

حل . فرض می‌کنیم جواب مساله $y(t)$ و تبدیل لاپلاس تابع مجهول $y(t)$ ، $Y(s)$ باشد یعنی $\mathcal{L}(y(t))=Y(s)$ باشد ، پس

$$\mathcal{L}(y''-2y'-3y)=\mathcal{L}(y'')-2\mathcal{L}(y')-3\mathcal{L}(y)=0$$

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-2sY+2y(0)-3Y=0$$

$$Y(s^2-2s-3)=s+5$$

$$Y=\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

و

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right)=2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)-\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s+1}$$

$$=2e^{3t}-e^{-t}$$

مثال ۶ . ۲۸ . معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید .

$$y''-3y'+2y=2e^{-t}\ ,\ y(0)=2\ ,\ y'(0)=-1$$

حل . از طرفین معادله بالا لاپلاس می‌گیریم .

$$\mathcal{L}(y'')-3\mathcal{L}(y')+2\mathcal{L}(y)=2\mathcal{L}(e^{-t})$$

$$s^2Y-2s+1-3sY+6+2Y=\frac{2}{s+1}$$

$$Y(s^2-3s+2)=\frac{2}{s+1}+2s-7$$

$$:Y=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{4}{s-1}-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{7}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$$

مجموعهٔ مسائل ۶ . ۲ .

با استفاده از قضیه ۶ . ۷ . تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

۱ . $f(t)=t\sin 5t$

۲ . $f(t)=te^{2t}$

۳ . $f(t)=t\sinh 4t$

۴ . $f(t)=t\cosh t$

۵ . $f(t)=\frac{1}{16}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

۶ . $f(t)=\frac{1}{6}(\sin 3t+3t\cos 3t)$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید .

۷ . $y''+4y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=1$

۸ . $y''+9y=\sin 2t\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=1$

۹ . $y''+y'-2y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=3$

۱۰ . $y''-y'-6y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$

با استفاده از قضیه ۶ . ۶ . تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

۱۱.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } 0<t<1 \\ 1 & \text{اگر } 1<t<2 \\ 0 & \text{اگر } t>2 \end{cases}$$

۱۲.

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر } 0<t<1 \\ 0 & \text{اگر } t>1 \end{cases}$$

۱۳.

$$f(t)=\begin{cases} 2-t & \text{اگر } 1<t<2 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

۱۴.

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } 0<t<1 \\ t & \text{اگر } 1<t<2 \\ 0 & \text{اگر } t>2 \end{cases}$$

۶.۳. تبدیل لاپلاس انتگرال

قضیه ۶.۸. اگر $f(t)$ تابعی پیوستهٔ قطعه‌ای و در شرایط قضیهٔ وجود صدق کند، و $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r)\,dr\right]=\frac{1}{s}F(s). \tag{۱}$$

اثبات. فرض می‌کنیم

$h(t)=\int_0^t f(r)\,dr$.

بنابراین $h(t)$ تابعی است پیوسته و چون $h'(t)=f(t)$ پس $h'(t)$ تابعی است پیوستهٔ قطعه‌ای و هم‌مرتبهٔ نمایی تابع e^{at}، زیرا

$$|h(t)|=\left|\int_0^t f(r)\,dr\right|\leq\int_0^t |f(r)|\,dr\leq M\int_0^t e^{at}\,dt=\frac{M}{a}(e^{at}-1)$$

و بنابراین، طبق فرمول (۲) بخش ۶.۲. داریم

$$\mathcal{L}(h'(t))=s\mathcal{L}(h(t))-h(0)$$

از طرفی

$$h(0)=\int_0^0 f(r)\,dr=0$$

پس

$$\mathcal{L}(f(t))=s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r)\,dr\right]$$

و

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r)\,dr\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

با استفاده از فرمول (۱) داریم،

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}F(s)=\int_0^t f(r)\,dr \tag{۲}$$

مثال ۶.۲۹. تبدیل لاپلاس تابع

$$h(t)=\int_0^t \sin r\,dr$$

را پیدا کنید.

حل.

$$f(t)=\sin t\ ,\quad F(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

و بنا بر فرمول (۱) داریم،

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin r\,dr\right]=\frac{1}{s(s^2+1)}$$

مثال ۶.۳۰. تبدیل لاپلاس تابع

$$h(t)=\int_0^t r\cos 2r\,dr$$

را پیدا کنید.

حل . با توجه به مثال ۶ . ۲۴ . داریم

$$f(t)=t\cos 2t \quad , \quad F(s)=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

و

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t r\cos 2r\,dr\right]=\frac{s^2-4}{s(s^2+4)^2}$$

مثال ۶ . ۳۱. تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{s(s+2)}$ را پیدا کنید .

حل .

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)=e^{-2t}$$

و طبق فرمول (۲) داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+2}\right)=\int_0^t e^{-2r}dr=-\frac{1}{2}e^{-2r}\Big|_0^t=\frac{1}{2}(1-e^{-2t}).$$

مثال ۶ . ۳۲. تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{s^2(s^2-1)}$ را پیدا کنید .

حل .

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)=\sinh t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)=\int_0^t \sinh r\,dr=\cosh r\Big|_0^t=\cosh t-1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s(s^2-1)}\right)=\int_0^t(\cosh r-1)dr=\sinh r-r\Big|_0^t=\sinh t-t$$

مثال ۶ . ۳۳. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید .

$$\frac{1}{s^2}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)$$

حل .

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\int_0^t e^{-r}dr=-e^{-r}\Big|_0^t=1-e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)=\int_0^t(1-e^{-r})dr=r+e^{-r}\Big|_0^t=t+e^{-t}-1$$

و در نتیجه

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)=2-2e^{-2t}-t.$$

مثال ۶ . ۳۴. معادله دیفرانسیل

$$y''-4y'=1 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$$

را حل کنید .

حل . از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y'')-4\mathcal{L}(y')=\mathcal{L}(1)$$

$$s^2Y-4sY=\frac{1}{s}$$

$$Y=\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s-4}\right)$$

و

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s-4}\right)$$

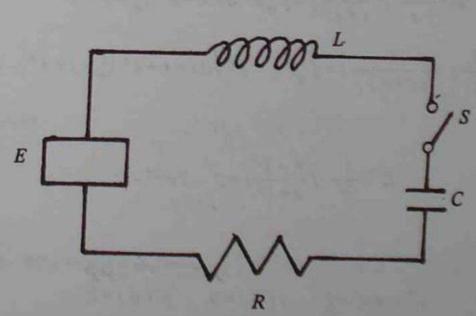
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-4}\right)=e^{4t}\ , \quad \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-4}\right)=\int_0^t e^{4r}\,dr=\frac{1}{4}\left(e^{4t}-1\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s(s-4)}\right)=\frac{1}{4}\int_0^t\left(e^{4r}-1\right)dr=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}-t\right)$$

و

$$y(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}-t\right).$$

مثال ۶ . ۳۵. شدت جریان $i(t)$ در مدار شکل زیر را پیدا کنید .



شکل ۶ . ۴

حل . طبق قانون دوم کیرشهف داریم

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{c}\int_0^t i(r)\,dr=E \qquad (1)$$

از طرفین (۱) لاپلاس می‌گیریم ، داریم

$$L\mathcal{L}\left(\frac{di(t)}{dt}\right)+R\mathcal{L}(i(t))+\frac{1}{c}\mathcal{L}\left(\int_0^t i(r)\,dr\right)=\mathcal{L}(E)$$

و با فرض ثابت بودن E , c , R , L ، $i(0)=I_0$

$$L(sI-I_0)+RI+\frac{1}{c}\cdot\frac{I}{s}=\frac{E}{s}$$

$$I\left(Ls+R+\frac{1}{cs}\right)=\frac{E}{s}+LI_0$$

$$I=\frac{E+sLI_0}{s\left(Ls+R+\frac{1}{cs}\right)}$$

و

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}(I)$$

مجموعه مسائل ۶ . ۳

تبدیل لاپلاس توابع زیر را با استفاده از قضیه ۶ . ۸ . پیدا کنید .

۱. $\int_0^t (r^3-4\cos r)\,dr$

۲. $\int_0^t (r^{1/2}-2\sinh r)\,dr$

۳. $\int_0^t (2\sin 3r+4e^{-r}-\cosh 2r)\,dr$

با استفاده از فرمول (۲) تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید .

۴. $\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$

۵. $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s+3}{s^2+9}\right)$

۶. $\dfrac{3s-4}{s^2(s^2-9)}$

۷. $\dfrac{1}{s^3(s-5)}$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

۸. $y''+y=2 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

۹. $y''+y'=1 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=2$

۱۰. $y''+9y=t \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$

۱۱. $y''-y'-2y=3 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$

۱۲. $y''+y'-12y=t \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$

۶.۴. قضایای انتقال

الف) : انتقال بر محور "s"ها

قضیه ۶.۹. اگر $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ برای $s>a$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)]=F(s-b) \qquad (۱)$$

برای $s\geqslant a+b$ و b ثابت دلخواه می‌باشد.

اثبات. با استفاده از تعریف داریم:

$$F(s-b)=\int_0^\infty e^{-(s-b)t}f(t)\,dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-st}(e^{bt}f(t))\,dt$$
$$=\mathcal{L}[e^{bt}f(t)].$$

حال اگر از طرفین رابطه (۱) تبدیل معکوس بگیریم، داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-b)]=e^{bt}f(t) \qquad (۲)$$

مثال ۶.۳۶. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=e^{2t}t$$

را پیدا کنید.

حل. در این مثال

$$f(t)=t \quad , \quad F(s)=\frac{1}{s^2} \quad , \quad b=2$$

پس

$$\mathcal{L}(e^{2t}t)=F(s-2)=\frac{1}{(s-2)^2}\,.$$

مثال ۶.۳۷. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=e^{-3t}\cos 2t$$

را پیدا کنید.

حل.

$$f(t)=\cos 2t \quad , \quad F(s)=\frac{s}{s^2+4} \quad , \quad b=-3$$

بنابراین

$$\mathcal{L}(e^{-3t}\cos 2t)=F(s+3)=\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

مثال ۶.۳۸. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=e^{-2t}(\sin t+4t^2-1)$$

را پیدا کنید.

حل.

$$f(t)=\sin t+4t^2-1 \quad , \quad F(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{8}{s^3}-\frac{1}{s} \quad , \quad b=-2$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}(\sin t+4t^2-1)]=F(s+2)$$

$$= \frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{8}{(s+2)^3} - \frac{1}{s+2}$$

مثال ۶ . ۳۹. تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = \cosh 2t \cos 2t$$

را پیدا کنید .

حل . می‌دانیم

$$\cosh 2t = \frac{1}{2}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)$$

و

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(e^{2t}\cos 2t + e^{-2t}\cos 2t\right)$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(e^{2t}\cos 2t) + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(e^{-2t}\cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

$$= \frac{s^3}{s^4+64}$$

مثال ۶ . ۴۰. تبدیل معکوس تابع زیر را بدست آورید .

$$\frac{2s+1}{s^2+4s+13}$$

حل .

$$\frac{2s+1}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)-3}{(s+2)^2+9} = 2\,\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{2s+1}{s^2+4s+13} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \mathcal{L}^{-1}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$= 2e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+9} - e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{3}{s^2+9}$$

$$= e^{-2t}\left(2\cos 3t - \sin 3t\right).$$

مثال ۶ . ۴۱. معادله دیفرانسیل

$$y''+2y'+5y=0 \quad , \quad y(0)=2 \quad , \quad y'(0)=-4$$

را حل کنید .

حل .

$$\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+5\mathcal{L}(y)=0$$

$$s^2Y-2s+4+2sY-4+5Y=0$$

$$Y=\frac{2s}{s^2+2s+5}=\frac{2s}{(s+1)^2+4}$$

$$= 2\,\frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

و

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) - \mathcal{L}^{-1}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$y(t)=e^{-t}\left(2\cos 2t - \sin 2t\right)$$

مثال ۶ . ۴۲. معادله دیفرانسیل

$$y''-4y'+4y=0 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=2$$

را حل کنید .

حل .

$$\mathcal{L}(y'')-4\mathcal{L}(y')+4\mathcal{L}(y)=0$$

$$s^2Y-2-4sY+4Y=0$$

$$Y=\frac{2}{s^2-4s+4}=\frac{2}{(s-2)^2}$$

و

$$\begin{aligned} y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)&=\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{(s-2)^2} \\ &=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^2} \\ &=2te^{2t} \end{aligned}$$

مثال ۶ . ۴۳. نشان دهید . اگر a و b مقادیر ثابت باشند و $a>0$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}[F(as+b)]=\frac{1}{a}e^{-b\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right). \qquad (۳)$$

حل. طبقه قضیه ۶ . ۵ . داریم ،

$$\mathcal{L}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right)=aF(as)$$

و بنابر قضیه ۶ . ۹ داریم ،

$$\mathcal{L}\left[e^{-b\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as+b)$$

پس

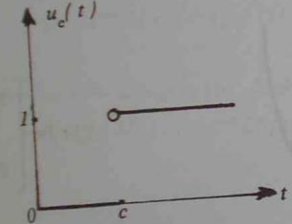
$$\mathcal{L}^{-1}[F(as+b)]=\frac{1}{a}e^{-b\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

قبل از بیان دومین قضیه‌ی انتقال ، مختصری راجع به تابع پله‌ای واحد و تبدیل لاپلاس آن بحث می‌کنیم .

تعریف ۶ . ۴ . تابع پله‌ای واحد* که با نماد $u_c(t)$ نشان‌داده‌می‌شود، عبارت‌است‌از :

* *Unit step function*

$$u_c(t)=\begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad t<c \\ 1 & \text{اگر} \quad t>c \end{cases} \qquad c\geqslant 0 \qquad (۴)$$



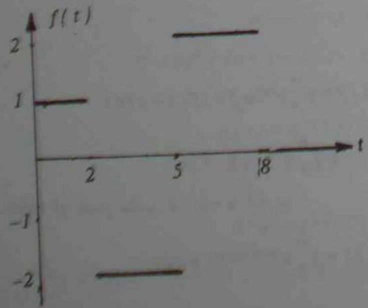
شکل ۶ . ۵ . تابع پله‌ای واحد

مثال ۶ . ۴۴ . تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را پیدا کنید .

حل .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_c(t))&=\int_0^\infty u_c(t)e^{-st}dt \\ &=\int_c^\infty e^{-st}dt \\ &=\frac{e^{-sc}}{s}\ , \quad s>0 \end{aligned}$$

مثال ۶ . ۴۵ . تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید .

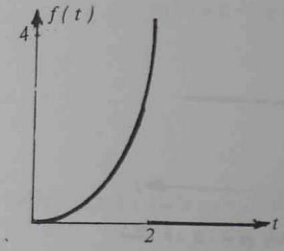


$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad 0<t<2 \\ -2 & \text{اگر} \quad 2<t<5 \\ 2 & \text{اگر} \quad 5<t<8 \\ 0 & \text{اگر} \quad t>8 \end{cases}$$

حل .

$$f(t)=u_0(t)-3u_2(t)+4u_5(t)-2u_8(t)$$

مثال ۶ . ۴۶ . تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان کنید .



$$f(t)=\begin{cases} t^2 & \text{اگر } 0\leq t<2 \\ 0 & \text{اگر } t>2 \end{cases}$$

حل .

$$f(t)=(u_0(t)-u_2(t))t^2$$

زیرا $u_0(t)-u_2(t)$ برابر "۱" می‌باشد اگر $0\leq t<2$ و برابر صفر می‌باشد اگر $t>2$

ب) : انتقال بر محور "t"ها

قضیه ۶ . ۱۰ . اگر $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ برای $s>a\geq 0$ و اگر c یک ثابت دلخواه مثبت باشد آنگاه،

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)]=e^{-cs}\mathcal{L}(f(t))=e^{-cs}F(s)\ ,\quad s>a \qquad (۵)$$

اثبات .

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)]=\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$

$$=\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt$$

با استفاده از تغییر متغیر $v=t-c$ داریم،

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)]=\int_0^\infty e^{-s(v+c)}f(v)dv$$

$$=e^{-cs}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv$$

$$=e^{-cs}\mathcal{L}(f(t))=e^{-cs}F(s).$$

با توجه به فرمول (۵) . اگر $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ داریم،

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)]=u_c(t)f(t-c). \qquad (۶)$$

مثال ۶ . ۴۷ . نشان دهید که فرمول (۵) را می‌توان به‌فرم زیر نوشت :

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t)]=e^{-cs}\mathcal{L}(f(t+c)). \qquad (۷)$$

حل . فرض می‌کنیم

$$g(t)=f(t+c)$$

پس

$$f(t)=g(t-c)$$

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t)]=\mathcal{L}[u_c(t)g(t-c)]$$

$$=e^{-cs}\mathcal{L}(g(t))$$

$$=e^{-cs}\mathcal{L}[f(t+c)].$$

مثال ۶ . ۴۸ . تبدیل لاپلاس تابع زیر را با استفاده از فرمول (۵) پیدا کنید .

$$g(t)=u_1(t)(t^3-3t^2+4t+4) \qquad (۱)$$

حل . ابتدا قسمت چندجمله‌ای (۱) را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$t^3-3t^2+4t+4=A(t-1)^3+B(t-1)^2+c(t-1)+D$$

و بدست می‌آوریم $A=1$ و $B=0$ و $c=1$ و $D=6$ بنابراین

$$g(t)=u_1(t)[(t-1)^3+(t-1)+6]$$

$$\mathcal{L}g(t)=e^{-s}[\mathcal{L}(t^3)+\mathcal{L}(t)+\mathcal{L}(6)]$$

$$\mathcal{L}(g(t))=e^{-s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s^2}+\frac{6}{s}\right)$$

مثال ۶ . ۴۹ . تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ مثال ۶ . ۴۸ . را با استفاده از فرمول (۷)

بدست آورید .

حل .

$$\mathcal{L}[u_1(t)(t^3-3t^2+4t+4)] = e^{-s}\mathcal{L}[(t+1)^3-3(t+1)^2+4(t+1)+4]$$

$$= e^{-s}\mathcal{L}(t^3+t+6) = e^{-s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s^2}+\frac{6}{s}\right)$$

مثال ۶ . ۵۰ . تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & \text{اگر } 0<t<1 \\ 0 & \text{اگر } t>1 \end{cases}$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا تابع $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان می‌کنیم

$$f(t) = [u_0(t)-u_1(t)]\,t^2$$
$$= t^2 - u_1(t)t^2$$

و

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t^2) - \mathcal{L}(u_1(t)t^2)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\mathcal{L}((t+1)^2)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\mathcal{L}(t^2+2t+1)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right).$$

مثال ۶ . ۵۱ . تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = u_\pi(t)\cos t$$

را پیدا کنید .

حل .

$$\mathcal{L}[u_\pi(t)\cos t] = e^{-\pi s}\mathcal{L}(\cos(t+\pi))$$

$$= e^{-\pi s}\mathcal{L}(-\cos t)$$

$$= -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

مثال ۶ . ۵۲ . تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } t<\pi \\ t-\pi & \text{اگر } \pi\leqslant t<2\pi \\ 0 & \text{اگر } t\geqslant 2\pi \end{cases}$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا تابع $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان می‌کنیم .

$$f(t) = (u_\pi(t) - u_{2\pi}(t))(t-\pi)$$
$$= u_\pi(t)(t-\pi) - u_{2\pi}(t)(t-\pi)$$

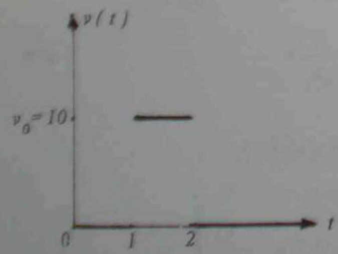
و

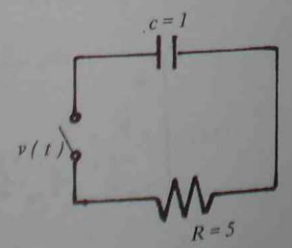
$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_\pi(t)(t-\pi) - \mathcal{L}(u_{2\pi}(t)(t-\pi))$$

$$= e^{-\pi s}\mathcal{L}(t) - e^{-2\pi s}\mathcal{L}(t+\pi)$$

$$= e^{-\pi s}\frac{1}{s^2} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}\right)$$

مثال ۶ . ۵۳ . در مدار Rc زیر ، ولتاژ v_0 در مدار فرستاده می‌شود . فرض کنید قبل از آن جریانی از مدار نمی‌گذرد ؛ شدت جریان $i(t)$ را پیدا کنید .





حل.

$$Ri(t)+\frac{1}{c}\int_0^t i(r)dr = v(t)$$

$$5i(t)+\int_0^t i(r)dr = 10(u_1(t)-u_2(t))$$

از طرفین رابطه بالا لاپلاس می‌گیریم

$$5\mathcal{L}(i(t))+\mathcal{L}[\int_0^t i(r)dr] = 10[\mathcal{L}(u_1(t))-\mathcal{L}(u_2(t))]$$

$$5I+\frac{I}{s} = 10(\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s})$$

$$I=\frac{10}{5s+1}(e^{-s}-e^{-2s})$$

$$=\frac{2}{s+1/5}(e^{-s}-e^{-2s})$$

از طرفی

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s+1/5})=2e^{-\frac{t}{5}}$$

و

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}(I)=\mathcal{L}^{-1}e^{-s}\cdot\frac{2}{s+1/5}-\mathcal{L}^{-1}e^{-2s}\cdot\frac{2}{s+1/5}$$

و بنابر فرمول (۶) داریم،

$$i(t)=2[e^{-\frac{1}{5}(t-1)}u_1(t)-e^{-\frac{1}{5}(t-2)}u_2(t)]$$

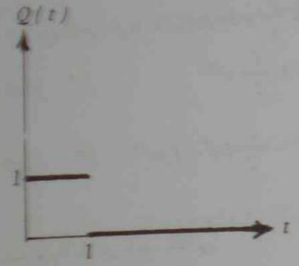
یعنی

$$i(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \text{ اگر } \\ e^{\frac{1}{5}}\cdot e^{-\frac{t}{5}} & 1<t<2 \text{ اگر } \\ (e^{\frac{1}{5}}-e^{+\frac{2}{5}})e^{-\frac{t}{5}} & t>2 \text{ اگر } \end{cases}$$

مثال ۶.۵۴. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y''+3y'+2y=Q(t)\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0$$

که در آن



$$Q(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<1 \text{ اگر } \\ 0 & t>1 \text{ اگر } \end{cases}$$

حل. ابتدا $Q(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان می‌کنیم:

$$Q(t)=u_0(t)-u_1(t)$$

حال از طرفین معادله دیفرانسیل، لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y'')+3\mathcal{L}(y')+2\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(u_0(t)-u_1(t))$$

$$s^2Y+3sY+2Y=\frac{1}{s}(1-e^{-s})$$

$$Y=F(s)(1-e^{-s})\ ,\ F(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

ابتدا $\mathcal{L}^{-1}(F)$ را حساب می‌کنیم

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2})$$

$$=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-s}F(s))=u_1(t)f(t-1)=$$

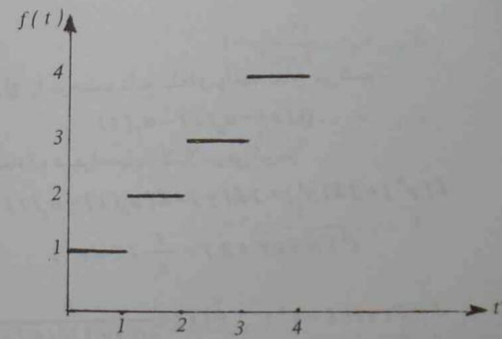
$$=\begin{cases} 0 & 0\leq t<1 \text{ اگر } \\ \frac{1}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & t>1 \text{ اگر } \end{cases}$$

و در نتیجه

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=f(t)-u_1(t)f(t-1)$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<1 \\ (e-1)e^{-t}-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-2t} & \text{اگر} \quad t\geqslant 1 \end{cases}$$

مثال ۶ . ۵۵ . تبدیل لاپلاس تابع پلکانی



شکل ۶ . ۶

را پیدا کنید .

حل . ابتدا تابع پلکانی $f(t)$ را برحسب توابع پله‌ای بیان می‌کنیم ،

$$f(t)=u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+\cdots$$

حال از طرفین رابطه بالا ، لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s}(1+e^{-s}+e^{-2s}+\cdots)$$

عبارت داخل پرانتز یک تصاعد هندسی است با قدر نسبت e^{-s} و چون $|e^{-s}|=e^{-s}<1$ پس

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-s}}$$

مجموعه مسائل ۶ . ۴

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید .

۱. $f(t)=e^{-t}(2\sqrt{t}-5\sin t-2)$

۲. $f(t)=e^{3t}\sinh 4t$

۳. $f(t)=\sinh 2t\cos t$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید .

۴. $\dfrac{1}{(s+4)^3}-\dfrac{2}{(s-1)^4}$

۵. $\dfrac{s}{s^2-2s+2}$

۶. $\dfrac{s-1}{s(s^2+2s+1)}$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید .

۷. $y''+2y'+17y=0 \quad , \quad y(0)=0 \ , \ y'(0)=12$

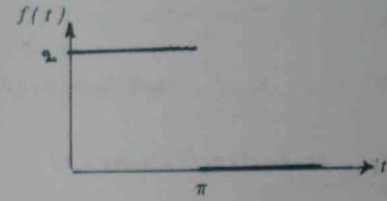
۸. $4y''+4y'+37y=0 \quad , \quad y(0)=3 \ , \ y'(0)=\dfrac{3}{2}$

۹. $y''+y'+1.25y=0 \quad , \quad y(0)=1 \ , \ y'(0)=-\dfrac{1}{2}$

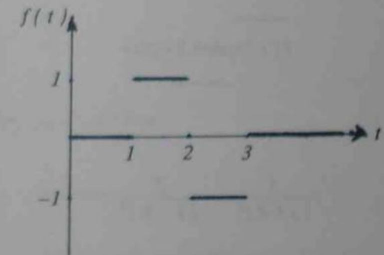
۱۰. $y''+4y'+4y=8e^{-2t} \quad , \quad y(0)=1 \ , \ y'(0)=1$

توابع زیر را برحسب توابع پله‌ای واحد بیان نموده و تبدیل لاپلاس هریک را بنویسید

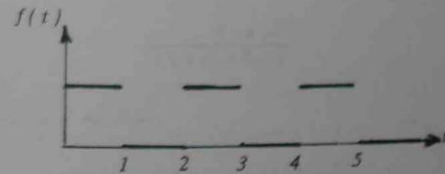
۱۱.



۱۲



۱۳



تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱۴. $(t-\pi)u_\pi(t)$

۱۵. $t^3u_2(t)$

۱۶. $u_\pi(t)\sin t$

۱۷. $e^{-3t}u_1(t)$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱۸. $$f(t)=\begin{cases} t^3 & 0<t<1 \\ 0 & t\geq 1 \end{cases}$$

۱۹. $$f(t)=\begin{cases} 4\cos 2t & 0<t<\frac{\pi}{2} \\ 0 & t\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲۰. $$f(t)=\begin{cases} 2-e^{3t} & 0<t<\pi \\ 0 & t\geq\pi \end{cases}$$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

۲۱. $\dfrac{e^{-s}}{s^4}$

۲۲. $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+4}$

۲۳. $\dfrac{1-e^{-s}}{s(s+2)}$

۲۴. $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+20}$

۲۵. $\dfrac{se^{3s}}{s^2-9}$

۶ . ۵ . مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

قضیه ۶ . ۱۱ . اگر تابع $f(t)$ روی $t\geqslant 0$ پیوسته، قطعه‌ای و هم‌مرتبهٔ نمایی e^{at} با $a>0$ باشد، آنگاه برای $n=1,2,3,\dots$

$$F^{(n)}(s)=\frac{d^nF(s)}{ds^n}=\mathcal{L}[(-t)^nf(t)] \quad , \quad s>a \qquad (۱)$$

اثبات. اگر $n=1$ باشد،

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right]$$

$$=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}f(t))\,dt$$

$$=\int_0^\infty -t\,e^{-st}f(t)\,dt$$

$$=\mathcal{L}(-tf(t)).$$

و اگر همین روش را ادامه دهیم، قضیه برای هر n درست می‌باشد؛ و با توجه به (۱) داریم

$$f(t)=\frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}F'(s) \qquad (۲)$$

مثال ۶ . ۵۶ . تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=t\cos at$$

را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $f(t)=\cos at$ باشد، آنگاه

$$F(s)=\mathcal{L}(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}$$

و چون

$$\mathcal{L}(tf(t))=-F'(s)$$

پس

$$\mathcal{L}(t\cos at)=-\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)'$$

$$=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال ۶ . ۵۷ . تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=t^2\sin at$$

را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم اگر $f(t)=\sin at$ باشد، آنگاه

$$F(s)=\mathcal{L}(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

و

$$\mathcal{L}(t^2f(t))=F''(s)$$

بنابراین

$$\mathcal{L}(t^2\sin at)=\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)''$$

$$=\frac{6as-2a^3}{(s^2+a^2)^3}$$

مثال ۶ . ۵۸ . تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=t^2\sinh at$$

را پیدا کنید.

حل. اگر $f(t)=\sinh at$ باشد، آنگاه $F(s)=\frac{a}{s^2-a^2}$

و

$$\mathcal{L}(t^2\sinh at)=\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)''$$

$$=\frac{6as^2+2a^3}{(s^2-a^2)^3}$$

مثال ۶ . ۵۹ . تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=t^2 e^{2t}$$

را پیدا کنید .

حل . می‌دانیم اگر $f(t)=e^{2t}$ باشد ، آنگاه $F(s)=\dfrac{1}{s-2}$

پس

$$\mathcal{L}(t^2 e^{2t})=\left(\frac{1}{s-2}\right)''$$

$$=\frac{2}{(s-2)^3}$$

مثال ۶ . ۶۰ . تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=t^2 e^{-2t}\sin t$$

را حساب کنید .

حل .

$$\mathcal{L}(t^2 e^{-2t}\sin t)=\mathcal{L}(t^2 f(t))=F''(s)$$

که

$$f(t)=e^{-2t}\sin t \ , \ F(s)=\mathcal{L}(e^{-2t}\sin t)$$

از طرفی

$$F(s)=F_1(s+2)$$

و

$$F_1(s)=\mathcal{L}(\sin t)=\frac{1}{s^2+1}$$

بنابراین

$$F(s)=\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

و

$$\mathcal{L}(t^2 e^{-2t}\sin t)=\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)''$$

و با دو بار مشتق‌گیری نسبت به s جواب مطلوب بدست می‌آید .

مثال ۶ . ۶۱ . تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t)=t e^{-t}\cos t$$

را پیدا کنید .

حل .

$$\mathcal{L}(t e^{-t}\cos t)=\mathcal{L}(t f(t))=-F'(s)$$

که

$$f(t)=e^{-t}\cos t \ , \ F(s)=\mathcal{L}(e^{-t}\cos t)$$

و می‌دانیم

$$F(s)=F_1(s+1)$$

$$F_1(s)=\mathcal{L}(\cos t)=\frac{s}{s^2+1}$$

و

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

و

$$\mathcal{L}(t e^{-t}\cos t)=-\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)'$$

$$=\frac{s^2+2s}{((s+1)^2+1)^2}$$

مثال ۶ . ۶۲ . مقدار انتگرال زیر را حساب کنید .

$$\int_0^\infty t e^{-2t}\sin t\, dt$$

حل. ابتدا، حاصل انتگرال زیر را بدست می‌آوریم و سپس در جواب $s=2$ قرار می‌دهیم

$$\int_0^\infty t\, e^{-st} \sin t\, dt = \mathcal{L}(t \sin t)$$

و می‌دانیم

$$\mathcal{L}(t \sin t) = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$$

$$= \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

و

$$\int_0^\infty t\, e^{-2t} \sin t\, dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=2} = \frac{4}{25}$$

مثال ۶.۶۳. $f(t)$ را پیدا کنید، اگر

$$F(s) = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

حل. با توجه به فرمول (۲) ابتدا $F'(s)$ را حساب می‌کنیم.

$$F'(s) = \frac{-\frac{1}{s^2}}{\left(\frac{1}{s}\right)^2+1} = \frac{-1}{s^2+1}$$

و

$$f(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\frac{-1}{s^2+1} = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{\sin t}{t}$$

مثال ۶.۶۴. $f(t)$ را پیدا کنید اگر

$$F(s) = Ln\frac{s}{s-1}$$

حل. با توجه به فرمول (۲) ابتدا $F'(s)$ را حساب می‌کنیم

$$F'(s) = -\frac{1}{s(s-1)}$$

و

$$f(t) = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{t}\int_0^t e^t\, dt$$

$$= \frac{e^t-1}{t}$$

مجموعه مسائل ۶.۵.

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱. $t^2 \cosh 2t$

۲. $t(5\sin 4t - 2t\cos t)$

۳. $t(2\cosh 4t + 3t\sinh 2t)$

۴. $t^n e^{at}$

۵. $t\, e^{4t} \sin 3t$

۶. $t^2 e^{-t}\int_0^t e^{2t}\sin 5t\, dt$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

۷. $F(s) = Ln\frac{s^2+1}{s(s+1)}$

۸. $F(s)=Ln\frac{s^2+4}{s^2}$

۹. $F(s)=\cot^{-1}(s+4)$

۱۰. $F(s)=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید .

۱۱. $\int_0^\infty e^{-t}t^2\cos t\,dt$

۱۲. $\int_0^\infty e^{-3t}\,t\sinh 2t\,dt$

۱۳. $\int_0^\infty t\,e^{-4t}\cos 2t\,dt$

۶ . ۶ . انتگرالگیری از تبدیل لاپلاس

قضیه ۶ . ۱۲. اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه‌ وجود صدق کند و اگر $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد و $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(u)\,du \qquad (۱)$$

اثبات.

$$\int_s^\infty F(u)\,du=\int_s^\infty\left[\int_0^\infty e^{-ut}f(t)\,dt\right]du$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-ut}f(t)\,du\right]dt$$

از طرفی

$$\int_s^\infty e^{-ut}f(t)\,du=\frac{-f(t)}{t}\,e^{-ut}\Big|_s^\infty=\frac{f(t)}{t}e^{-st}$$

پس

$$\int_s^\infty F(u)\,du=\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{f(t)}{t}\right)dt$$

$$=\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

با توجه به فرمول (۱) داریم

$$f(t)=t\,\mathcal{L}^{-1}\int_s^\infty F(u)\,du \qquad (۲)$$

مثال ۶ . ۶۵. تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sinh 2t}{t}$ را پیدا کنید .

حل . با فرض $f(t)=\sinh 2t$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sinh 2t}{t}=2$$

از طرفی

$$\mathcal{L}f(t)=\mathcal{L}(\sinh 2t)=\frac{2}{s^2-4}$$

و بنابر فرمول (۱) داریم ،

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sinh 2t}{t}\right)=\int_s^\infty\frac{2}{u^2-4}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\Bigg|_s^\infty$$

$$=0-\frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{s-2}{s+2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{s+2}{s-2}\right|$$

مثال ۶ . ۶۶. تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin 3t}{t}$ را پیدا کنید .

حل . با فرض $f(t)=\sin 3t$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 3t}{t}=3$$

و

$$\mathcal{L}(\sin 3t)=\frac{3}{s^2+9}$$

و بنابر فرمول (۱)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin 3t}{t}\right)=\int_s^\infty \frac{3}{u^2+9}\,du$$

$$=\tan^{-1}\frac{u}{3}\Big|_s^\infty$$

$$=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{3}=\cot^{-1}\frac{s}{3}$$

مثال ۶ . ۶۷. تبدیل لاپلاس تابع $\frac{1-\cos t}{t}$ را پیدا کنید .

حل . با فرض $f(t)=1-\cos t$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{t}=0$$

و

$$\mathcal{L}(1-\cos t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$$

بنا بر فرمول (۱)

$$\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)=\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+1}\right)du$$

$$=Ln\,u-\frac{1}{2}Ln(u^2+1)\Big|_s^\infty$$

$$=Ln\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\Big|_s^\infty=Ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$$

مثال ۶ . ۶۸. مقدار انتگرال زیر را بدست آورید .

$$\int_0^\infty \frac{\cos t-\cos 2t}{t}\,dt \qquad (1)$$

حل . ابتدا انتگرال زیر را پیدا می‌کنیم ،

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\cos t-\cos 2t}{t}\,dt=\mathcal{L}\left(\frac{\cos t-\cos 2t}{t}\right) \qquad (2)$$

سپس در جواب $s=0$ قرار می‌دهیم

برای محاسبه (۲) فرض می‌کنیم $f(t)=\cos t-\cos 2t$ و

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t-\cos 2t}{t}=0$$

و

$$\mathcal{L}(\cos t-\cos 2t)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

و بنا بر فرمول (۱)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\cos t-\cos 2t}{t}\right)=\int_s^\infty\left(\frac{u}{u^2+1}-\frac{u}{u^2+4}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(Ln(u^2+1)-Ln(u^2+4)\right)\Big|_s^\infty$$

$$=\frac{1}{2}Ln\frac{s^2+4}{s^2+1}$$

و

$$\int_0^\infty\frac{\cos t-\cos 2t}{t}\,dt=\frac{1}{2}Ln\frac{s^2+4}{s^2+1}\Big|_{s=0}$$

$$=Ln\,2$$

مثال ۶ . ۶۹. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید .

$$F(s)=\frac{s}{(s^2+4)^2}$$

حل. بنا بر فرمول (۲)

$$f(t)=t\,\mathcal{L}^{-1}\int_s^{\infty}\frac{u}{(u^2+4)^2}\,du$$

$$=\frac{t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{-1}{u^2+4}\right]_s^{\infty}\right\}$$

$$=\frac{t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+4}$$

$$=\frac{t}{4}\sin 2t$$

مثال ۶. ۷۰. تبدیل لاپلاس تابع

$$e^{t}\int_0^t e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$$

را پیدا کنید.

حل.

$$\mathcal{L}\left[e^{t}\int_0^t e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt\right]=F_1(s-1)$$

$$F_1(s)=\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt\right]=\frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2(s)=\mathcal{L}\left[e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\right]=F_3(s+2)$$

$$F_3(s)=\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)$$

و چون

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-e^{-t}}{t}=1$$

و

$$\mathcal{L}(1-e^{-t})=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

بنابراین

$$F_3(s)=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\operatorname{Ln}u-\operatorname{Ln}(u+1)\Big|_s^{\infty}$$

$$=\operatorname{Ln}\frac{u}{u+1}\Big|_s^{\infty}=\operatorname{Ln}\frac{s+1}{s}$$

و

$$F_2(s)=\operatorname{Ln}\frac{s+3}{s+2}$$ و

$$F_1(s)=\frac{1}{s}\operatorname{Ln}\frac{s+3}{s+2}$$ و

$$F_1(s-1)=\frac{1}{s-1}\operatorname{Ln}\frac{s+2}{s+1}$$

مجموعه مسائل ۶. ۶.

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱. $\dfrac{e^{t}-\cos t}{t}$

۲. $\dfrac{2}{t}(1-\cosh 3t)$

۳. $\dfrac{1}{t}(e^{-2t}-e^{-4t})$

نشان دهید که،

۴. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\quad,\quad a>0$

۵. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}\sin t}{t}\,dt=\cot^{-1}a\quad,\quad a>0$

۶. $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = Ln\,\frac{b}{a}$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید .

۷. $\frac{s}{(s^2+1)^2}$

۸. $\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$

۹. $\frac{s}{(s^2-4)^2}$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

۱۰. $e^{2t}\int_0^t e^{-t}\,\frac{\sin 2t}{t}\,dt$

۱۱. $\frac{1-\cos t}{t^2}$

۱۲. $t\int_0^t e^{3t}\,\frac{\sinh t}{t}\,dt$

۱۳. $t\int_0^t \frac{1-\cos t}{t\,t}\,dt$

۶ . ۷ . کانولوشن*

تعریف ۶ . ۵ . کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f*g)(t)$ نشان داده می‌شود ، عبارت است از :

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)\,d\lambda \qquad (1)$$

کانولوشن دارای خواص زیر می‌باشد :

* Convolution

آ . خاصیت جابجایی $f*g=g*f$

ب. خاصیت توزیع پذیری $f*(g+h)=f*g+f*h$

پ. خاصیت انجمنی $f*(g*h)=(f*g)*h$

ت. $f*0=0*f=0$

ث. $f*(cg)=(cf)*g=c(f*g)$

اما در حالت کلی $f*1=f$ نیست و $f*f\geqslant 0$ ممکن است نباشد .

اثبات قسمت آ . با فرض

$$t-\lambda=v \Rightarrow \lambda=t-v \;,\; d\lambda=-dv$$

$$\begin{aligned}(f*g)(t)&=\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)\,d\lambda\\ &=-\int_t^0 f(t-v)g(v)\,dv\\ &=\int_0^t g(v)f(t-v)\,dv\\ &=(g*f)(t)\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که در حالت کلی $1*f\neq f$

$$1*\cos t=\int_0^t \cos\lambda\, d\lambda=\sin\lambda\,\Big|_0^t=\sin t$$

مثال ۶ . ۷۱ . اگر $f(t)=\cos t$ باشد $(f*f)(t)$ را پیدا کنید

حل .

$$\begin{aligned}(f*f)(t)&=\int_0^t \cos\lambda\cos(t-\lambda)\,d\lambda\\ &=\frac{1}{2}\int_0^t [\cos t+\cos(2\lambda-t)]\,d\lambda\\ &=\frac{1}{2}[t\cos t+\sin t]\end{aligned}$$

و بعنوان مثال برای $t=\pi$ مقدار عبارت بالا برابر با $-\frac{\pi}{2}$ می‌باشد که منفی است . یعنی $(f*f)\ngeqslant 0$

قضیه ۶ . ۱۳ . قضیه کانولوشن

اگر $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع پیوسته، قطعه‌ای و هم‌مرتبه، نمایی e^{at} با $a>0$ باشند، آنگاه تبدیل لاپلاس $(f*g)(t)$ برای $s>a$ موجود و برابر $F(s)G(s)$ می‌باشد، به‌عبارت دیگر،

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]=(f*g)(t) \qquad (۲)$$

که $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ ، $G(s)=\mathcal{L}(g(t))$

اثبات.

$$F(s)G(s)=\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv}g(v)\,dv\right)$$

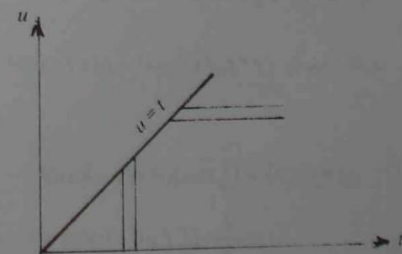
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)\,dv\,du$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$u+v=t \quad , \quad u=u$$

ژاکوبین تبدیل $j=1$. بنابراین

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-st}f(u)g(t-u)\,dt\,du$$



شکل ۶ . ۷

با عوض کردن ترتیب انتگرالگیری داریم،

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(u)g(t-u)\,du\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(u)g(t-u)\,du\right)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}((f*g)(t))\,dt$$

$$=\mathcal{L}((f*g)(t)).$$

مثال ۶ . ۷۲. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{(s-2)(s+3)}$$

را پیدا کنید.

حل. با فرض

$$F(s)=\frac{1}{s-2} \quad , \quad G(s)=\frac{1}{s+3}$$

داریم،

$$f(t)=e^{2t} \quad , \quad g(t)=e^{-3t}$$

و طبق فرمول (۲) داریم،

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-2)(s+3)}=\int_0^t e^{2\lambda}e^{-3(t-\lambda)}\,d\lambda$$

$$=e^{-3t}\int_0^t e^{5\lambda}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{5}\,e^{-3t}(e^{5t}-1).$$

مثال ۶ . ۷۳. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2} \qquad (۱)$$

را پیدا کنید.

حل. ابتدا (۱) را به‌فرم زیر می‌نویسیم

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{(s^2+1)}\cdot\frac{s}{(s^2+1)}$$

و می‌دانیم

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+1}=\cos t$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=\int_0^t \cos\lambda\cos(t-\lambda)\,d\lambda$$

و با توجه به مثال ۶ . ۷۱ .

$$=\frac{1}{2}[\,t\cos t+\sin t\,]$$

مثال ۶ . ۷۴. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$$

را پیدا کنید .

حل .

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{((s+2)^2+9)^2}$$

$$=e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+9)^2}$$

$$=e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s^2+9}$$

$$=\frac{1}{9}\,e^{-2t}\int_0^t \sin 3\lambda\sin 3(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{18}\,e^{-2t}\int_0^t (\cos(6\lambda-3t)-\cos 3t)\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{54}\,e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t)$$

مثال ۶ . ۷۵. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+4y=2\sin 3t\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=0$$

را حل کنید .

حل .

$$\mathcal{L}(y'')+4\,\mathcal{L}y=2\,\mathcal{L}\sin 3t$$

$$s^2Y+4Y=\frac{6}{s^2+9}$$

$$Y=\frac{6}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

و

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{3}{s^2+9}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

از طرفی

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{3}{s^2+9}=\sin 3t\ ,\quad \mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^2+4}=\sin 2t$$

بنابراین

$$y(t)=\int_0^t \sin 3\lambda\sin 2(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\sin 2t-\sin 3t\right)$$

مثال ۶ . ۷۶. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)}$$

را پیدا کنید .

حل .

$$F(s)=\frac{1}{s^3}\ \Rightarrow\ f(t)=\frac{t^2}{2}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+1}\ \Rightarrow\ g(t)=\sin t$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 \sin(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\cos t-1$$

مثال ۶ . ۷۷. تبدیل معکوس تابع

$$\frac{s}{(s-1)(s^2-4)^2}$$

را پیدا کنید .

حل .

$$F(s)=\frac{1}{s-1}\quad\Rightarrow\quad f(t)=e^t$$

$$G(s)=\frac{s}{(s^2-4)^2}\quad\Rightarrow\quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2-4)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2-4)^2}=\frac{t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty \frac{2u}{(u^2-4)^2}\,du\right]$$

$$=\frac{t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{u^2-4}\right]_s^\infty$$

$$=\frac{t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2-4}$$

$$=\frac{t}{4}\sinh 2t$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s}{(s^2-4)^2}=\frac{1}{4}\int_0^t e^{t-\lambda}\lambda\sinh 2\lambda\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{8}e^t\left(te^t-e^t+\frac{1}{3}te^{-3t}+\frac{1}{9}e^{-3t}+\frac{8}{9}\right)$$

تعریف ۶ . ۶ . ***معادلات انتگرالی***، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیرعلامت انتگرال می‌باشد .

تعریف ۶ . ۷ . ***معادلات دیفرانسیل انتگرالی***، معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می‌باشند .

برای حل این نوع معادلات از قضیه کانولوشن استفاده می‌کنیم .

مثال ۶ . ۷۸ . معادله زیر را حل کنید .

$$y(t)=\sin 2t+\int_0^t y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)\,d\lambda$$

حل . از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y(t))=\mathcal{L}(\sin 2t)+\mathcal{L}\left[\int_0^t y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)\,d\lambda\right]$$

$$Y=\frac{2}{s^2+4}+\mathcal{L}(y*\sin 2t)$$

$$=\frac{2}{s^2+4}+Y\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

و

$$Y=\frac{2}{s^2+2}$$

و

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^2+2}=\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$$

مثال ۶ . ۷۹ . معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$y(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda$$

حل . از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$Y=\frac{1}{s+1}-2\frac{s}{s^2+1}\cdot Y$$

بنابراین

$$Y=\frac{s^2+1}{(s+1)^3}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

و

$$y(t)=(1-t)^2e^{-t}$$

مثال ۶ . ۸۰. معادله دیفرانسیل

$$y''(t)+y'(t)=\cos t+\int_0^t \sin(t-\lambda)\,y'(\lambda)\,d\lambda\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=0$$

را حل کنید.

حل. از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y')=\mathcal{L}(\cos t)+\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin(t-\lambda)\,y'(\lambda)\,d\lambda\right]$$

$$s^2Y+sY=\frac{s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}Y$$

$$Y=\frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

$$y(t)=\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)dt$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+s+1}=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=e^{-t/2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+\frac{3}{4}}=e^{-t/2}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

و

$$y(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,dt$$

و با محاسبه انتگرال بالا، جواب پیدا می‌شود.

مجموعه مسائل ۶ . ۷.

کانولوشن های زیر را پیدا کنید.

۱. $(\sin t)*(\cos t)$

۲. $t*e^{at}$

۳. $(\sin 3t)*e^{2t}$

۴. $(\sin 2t)*(\sin 4t)$

۵. $1*\sin t$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

۶. $\dfrac{1}{s^3-5s^2}$

۷. $\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}$

۸. $\dfrac{1}{s+1}\,Ln\,\dfrac{s}{s-1}$

۹. $\dfrac{s}{s^2+1}\cot^{-1}(s+1)$

۱۰. $\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱۱. $f(t)=\int_0^t (t-\lambda)^3\sin\lambda\,d\lambda$

۱۲. $f(t)=\int_0^t \lambda^5 e^{3(t-\lambda)}\,d\lambda$

۱۳. $f(u)=\int_0^u (u-t)^3 t^5\,dt$

معادلات زیر را حل کنید.

۱۴. $y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\lambda)y(\lambda)\,d\lambda$

۱۵. $y(t)=1-\int_0^t (t-\lambda)y(\lambda)\,d\lambda$

۱۶. $y(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-\lambda)y(\lambda)\,d\lambda$

۱۷. $y'(t)+2y+\int_0^t y(\lambda)\,d\lambda=0 \qquad y(o)=1$

۶ . ۸. تبدیل لاپلاس توابع متناوب

تعریف ۶ . ۸. تابع $f(t)$ را متناوب با دورهٔ تناوب p گوییم، اگر $f(t+P)=f(t)$ باشد.

قضیه ۶ . ۱۴. فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوستهٔ قطعه‌ای و متناوب با دورهٔ تناوب P باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-PS}}\int_0^P e^{-St}f(t)\,dt \qquad (1)$$

اثبات.

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-St}f(t)\,dt$$
$$=\int_0^P e^{-St}f(t)\,dt+\int_P^{2P}e^{-St}f(t)\,dt+\int_{2P}^{3P}e^{-St}f(t)\,dt+\cdots$$

حال در انتگرال اول به‌جای t مقدار T و در انتگرال دوم به‌جای t مقدار $T+P$ و در انتگرال سوم به‌جای t مقدار $T+2P$ و به‌همین ترتیب در انتگرال $n+1$ ام به‌جای t مقدار $T+nP$ را قرار می‌دهیم. در این صورت حدود تمام انتگرالها از 0 تا P خواهد

شد. و در نتیجه

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^P e^{-ST}f(T)\,dT+\int_0^P e^{-S(T+P)}f(T+P)\,dT+$$
$$\int_0^P e^{-S(T+2P)}f(T+2P)\,dT+\cdots$$

از طرفی چون تابع متناوب با دورهٔ تناوب P است، داریم

$$f(T+P)=f(T+2P)=\cdots=f(T)$$

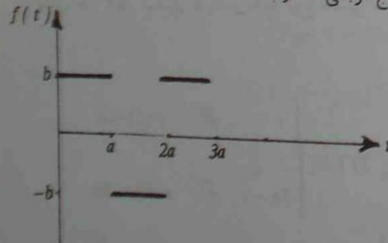
پس

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^P e^{-ST}f(T)\,dT+e^{-SP}\int_0^P e^{-ST}f(T)\,dT+e^{-2SP}\int_0^P e^{-ST}f(T)\,dT+\cdots$$
$$=(1+e^{-SP}+e^{-2SP}+e^{-3SP}+\cdots)\int_0^P e^{-ST}f(T)\,dT$$

و عبارت داخل پرانتز یک سری هندسی با قدر نسبت e^{-SP} می‌باشد، بنابراین

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-SP}}\int_0^P e^{-ST}f(T)\,dT.$$

مثال ۶ . ۸۱. تبدیل لاپلاس تابع موج مربعی متناوب



$$f(t)=\begin{cases} b & \text{اگر } 0<t<a \\ -b & \text{اگر } a<t<2a \end{cases}$$

شکل ۶ . ۸.

را پیدا کنید.

حل. تابع $f(t)$ تابعی است متناوب با دورهٔ تناوب $2a$، بنابراین طبق فرمول (۱) داریم،

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-2aS}}\int_0^{2a}e^{-St}f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2aS}}\left[\int_0^a b\, e^{-St}dt + \int_a^{2a} -b\, e^{-St}dt\right]$$

$$= \frac{b}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-2aS}}\left\{[e^{-St}]_a^{2a} - [e^{-St}]_0^{b}\right\}$$

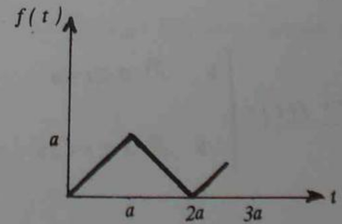
$$= \frac{b}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-2aS}}\left[e^{-2aS} - 2e^{-aS} + 1\right]$$

$$= \frac{b}{s}\cdot\frac{(1-e^{-aS})^2}{(1-e^{-aS})(1+e^{-aS})} = \frac{b}{s}\cdot\frac{1-e^{-aS}}{1+e^{-aS}}$$

$$= \frac{b}{s}\cdot\frac{e^{-\frac{aS}{2}}\left(e^{\frac{aS}{2}} - e^{-\frac{aS}{2}}\right)}{e^{-\frac{aS}{2}}\left(e^{\frac{aS}{2}} + e^{-\frac{aS}{2}}\right)}$$

$$= \frac{b}{s}\tanh\frac{as}{2}$$

مثال ۶ . ۸۲. تبدیل لاپلاس تابع موج مثلثی متناوب



$$f(t) = \begin{cases} t & \text{اگر}\quad 0<t<a \\ 2a-t & \text{اگر}\quad a<t<2a \end{cases}$$

شکل ۶ . ۹

را پیدا کنید.

حل. $f(t)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2a$ می‌باشد. و

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-2aS}}\int_0^{2a} e^{-St} f(t)\, dt$$

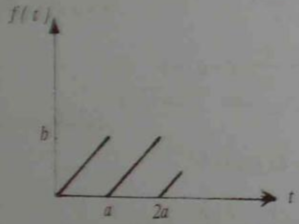
$$= \frac{1}{1-e^{-2aS}}\left[\int_0^a t\, e^{-St}dt + \int_a^{2a}(2a-t)\, e^{-St}dt\right]$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\frac{(1-e^{-aS})^2}{1-e^{-2aS}}$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1-e^{-aS}}{1+e^{-aS}}$$

$$= \frac{1}{s^2}\tanh\frac{as}{2}$$

مثال ۶ . ۸۳. تبدیل لاپلاس موج دندانه‌ای متناوب



$$f(t) = \frac{b}{a}\, t\ ,\quad 0<t<a$$

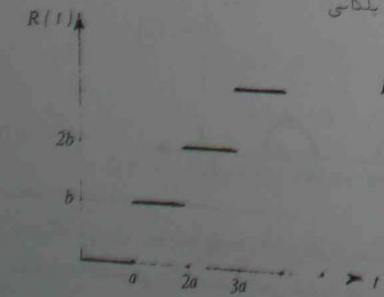
شکل ۶ . ۱۰

حل. $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب a می‌باشد. و

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-aS}}\int_0^a \frac{b}{a}\, t\, e^{-St}dt$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{1+as}{s^2} - \frac{b}{s(1-e^{-aS})}$$

مثال ۶ . ۸۴. تبدیل لاپلاس تابع پلکانی



$$R(t) = bn\ ,\ na<t<(n+1)a$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

شکل ۶ . ۱۱

را پیدا کنید.

حل. تابع $R(t)$ برابر است با تفاضل تابع $k(t)=\frac{b}{a}t$ و تابع مثال ۶ . ۸۳.

یعنی $R(t)=k(t)-f(t)$

زیرا اگر $0<t<a$ باشد، آنگاه

$$R(t)=\frac{b}{a}t-\frac{b}{a}t=0$$

و اگر $a<t<2a$

$$R(t)=\frac{b}{a}t-\frac{b}{a}(t-a)=b$$

و ...، بنابراین

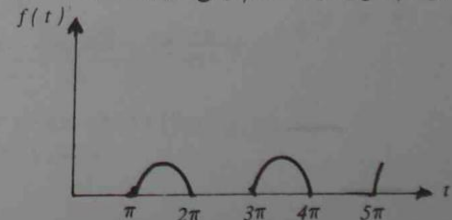
$$\mathcal{L}(R(t))=\mathcal{L}(k(t))-\mathcal{L}(f(t))$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{b}{a}\cdot\frac{1+as}{s^2}+\frac{b}{s(1-e^{-as})}$$

$$=-\frac{b}{s}\left(1-\frac{1}{1-e^{-as}}\right)$$

$$=\frac{b}{s}\cdot\frac{e^{-as}}{1-e^{-as}}$$

مثال ۶ . ۸۵. تبدیل لاپلاس یکسو شده نیم‌موجی $-\sin t$ را پیدا کنید.*



شکل ۶ . ۱۲

* هرگاه به‌وسیلهٔ یک اصلاح‌کننده (رکتی‌فایر) قسمت منفی موج را از بین ببریم، می‌گوییم یکسو شده نیم‌موجی و اگر قسمت منفی موج را مثبت کنیم می‌گوییم یکسو شده تمام‌موجی.

حل.

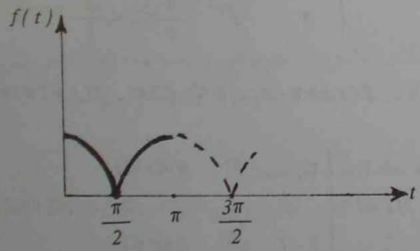
$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{اگر}\quad 0<t<\pi\\ -\sin t & \text{اگر}\quad \pi<t<2\pi\end{cases},\quad f(t+2\pi)=f(t)$$

$f(t)$ تابعی است متناوب با دورهٔ تناوب 2π، بنابراین

$$\mathcal{L}(f)=\frac{-1}{1-e^{-2\pi s}}\int_{\pi}^{2\pi}e^{-st}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{e^{s\pi}-1}$$

مثال ۶ . ۸۶. تبدیل لاپلاس یکسوشده تمام‌موجی $\cos t$ را پیدا کنید.



حل.

$$f(t)=\begin{cases}\cos t & \text{اگر}\quad 0<t<\frac{\pi}{2}\\ -\cos t & \text{اگر}\quad \frac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases},\quad f(t+\pi)=f(t)$$

$f(t)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب π، بنابراین

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-st}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-st}\cos t\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{1}{s^2+1}\left[s(1-e^{-\pi s})+2e^{-s\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\left[s + \frac{2e^{-s\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-\pi s}} \right]$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\left[s + \frac{1}{\sinh\frac{s\pi}{2}} \right]$$

مجموعه مسائل ۶ . ۸ .

تبدیل لاپلاس توابع متناوب زیر را پیدا کنید .

۱ .

$$f(t)=\begin{cases} \cos 4t & \text{اگر} \quad 0<t<\frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{اگر} \quad \frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2} \end{cases} ,f(t+\frac{\pi}{2})=f(t)$$

۲ . $f(t)=\pi-t \;,\; 0<t<2\pi \;,\; f(t+2\pi)=f(t)$

۳ .

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<1 \\ 2-t & \text{اگر} \quad 1\leqslant t<2 \end{cases} ,f(t+2)=f(t)$$

۴ .

$$f(t)=\begin{cases} 2 & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<3 \\ 0 & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<6 \end{cases} ,f(t+6)=f(t)$$

۵ .

$$f(t)=\begin{cases} \sin^2 2t & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<\frac{\pi}{2} \\ \cos^2 2t & \text{اگر} \quad \frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi \end{cases} ,f(t+\pi)=f(t)$$

۶ .

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<\frac{1}{2} \\ 1-t & \text{اگر} \quad \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{2} \\ t-2 & \text{اگر} \quad \frac{3}{2}\leqslant t<2 \end{cases} ,f(t+2)=f(t)$$

۷ . تبدیل لاپلاس و تبدیل لاپلاس یکسوشده نیم‌موجی و یکسوشده تمام موجی تابع زیر را پیدا کنید .

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر} \quad 0\leqslant t<\frac{1}{2} \\ t-1 & \text{اگر} \quad \frac{1}{2}\leqslant t<1 \end{cases} ,f(t+1)=f(t)$$

۸ . تبدیل لاپلاس یکسوشده نیم‌موجی و یکسو شده تمام موجی تمرین "۶" را بنویسید .

۹ . تبدیل لاپلاس یکسوشده تمام‌موجی $\sin t$ را بنویسید .

۶ . ۹ . دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این بخش با ارائه چند مثال روشن، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌کمک تبدیل لاپلاس ترشیح می‌گردد .

مثال ۶ . ۸۷. دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases} ,y_1(0)=1 \;.\; y_2(0)=0$$

حل . فرض می‌کنیم $\mathcal{L}(y_1)=Y_1 \;,\; \mathcal{L}(y_2)=Y_2$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1')=-\mathcal{L}(y_2) \\ \mathcal{L}(y_2')=\mathcal{L}(y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,Y_1 - 1 = -\,Y_2 \\ \\ s\,Y_2 = Y_1 \end{cases} \Rightarrow s(s\,Y_2) + Y_2 = 1$$

$$Y_2 = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1} = \sin t$$

و با جایگذاری $Y_2 = \dfrac{1}{s^2+1}$ در معادلهٔ دوم دستگاه آخر داریم ،

$$Y_1 = \frac{s}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+1} = \cos t$$

مثال ۶ . ۸۸ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1'' + y_1 - y_2'' - 4\,y_2 = 0 \\ y_1' + y_2' = \cos t + 2\cos 2t \end{cases} \qquad (۱)$$

$$y_1(0) = 0 \;,\; y_1'(0) = 1 \;,\; y_2(0) = 0 \;,\; y_2'(0) = 2$$

حل . از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1'') + \mathcal{L}(y_1) - \mathcal{L}(y_2'') - 4\,\mathcal{L}(y_2) = 0 \\ \\ \mathcal{L}(y_1') + \mathcal{L}(y_2') = \mathcal{L}(\cos t) + 2\,\mathcal{L}(\cos 2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 Y_1 - 1 + Y_1 - s^2 Y_2 + 2 - 4\,Y_2 = 0 \\ \\ s\,Y_1 + s\,Y_2 = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{2s}{s^2+4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+1)\,Y_1 - (s^2+4)\,Y_2 = -1 \\ \\ Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{2}{s^2+4} \end{cases} \qquad (۲)$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -(s^2+4) \\ \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{2}{s^2+4} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & -(s^2+4) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{s^2+4}{s^2+1}}{2s^2+5}$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1} = \sin t$$

با جایگذاری $Y_1 = \dfrac{1}{s^2+1}$ در معادلهٔ دوم دستگاه (۲) داریم ،

$$Y_2 = \frac{2}{s^2+4} \quad \Rightarrow y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^2+4}$$
$$= \sin 2t$$

مثال ۶ . ۸۹ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' + y_1 = y_2' + y_2 \\ y_1'' + y_2'' = e^t \end{cases} \qquad (۱)$$

$$y_1(0) = 0 \;,\; y_1'(0) = 1 \;,\; y_2(0) = 1 \;,\; y_2'(0) = 0$$

حل . از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1') + \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2') + \mathcal{L}(y_2) \\ \\ \mathcal{L}(y_1'') + \mathcal{L}(y_2'') = \mathcal{L}(e^t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1 + Y_1 = sY_2 - 1 + Y_2 \\ s^2 Y_1 - 1 + s^2 Y_2 - s = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)Y_1 - (s+1)Y_2 = -1 \\ s^2 Y_1 + s^2 Y_2 = \dfrac{s^2}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 - Y_2 = \dfrac{-1}{s+1} \\ Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{s-1} \end{cases} \qquad (۲)$$

و

$$2Y_1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

$$2y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s+1}$$

$$= e^t - e^{-t}$$

و در نتیجه

$$y_1 = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t$$

با جایگذاری Y_1 در رابطه دوم ، دستگاه (۲) داریم ،

$$Y_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right]$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s+1} + \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t)$$

$$= \cosh t$$

مثال ۶ . ۹۰ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_2'' - 4y_1 = -4e^t \\ y_1'' - y_1 = 3y_2 \end{cases} \qquad (۱)$$

$$y_1(0) = 2 \,,\; y_1'(0) = 3 \,,\; y_2(0) = 1 \,,\; y_2'(0) = 2$$

حل . از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم ،

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_2'') - 4\mathcal{L}(y_1) = -4\mathcal{L}e^t \\ \mathcal{L}(y_1'') - \mathcal{L}(y_1) - 3\mathcal{L}(y_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 Y_2 - s - 2 - 4Y_1 = \dfrac{-4}{s-1} \\ s^2 Y_1 - 2s - 3 - Y_1 - 3Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4Y_1 + s^2 Y_2 = \dfrac{s^2+s-6}{s-1} \\ (s^2-1)Y_1 - 3Y_2 = 2s+3 \end{cases}$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{s^2+s-6}{s-1} & s^2 \\ 2s+3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & s^2 \\ s^2-1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2s-3}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

و

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-1} + \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-2}$$

$$= e^t + e^{2t}$$

و

$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & \dfrac{s^2+s-6}{s-1} \\ s^2-1 & 2s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & s^2 \\ s^2-1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{s-2}$$

و

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-2} = e^{2t}$$

مثال ۶ . ۹۱ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2\sinh t \\ y_2' + y_3' = e^t \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \qquad (۱)$$

$$y_1(0) = 1 \ , \ y_2(0) = 1 \ , \ y_3(0) = 0$$

حل . از طرفین دستگاه (۱) لاپلاس می‌گیریم .

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1') + \mathcal{L}(y_2') = 2\,\mathcal{L}(\sinh t) \\ \mathcal{L}(y_2') + \mathcal{L}(y_3') = \mathcal{L}(e^t) \\ \mathcal{L}(y_3') + \mathcal{L}(y_1') = 2\,\mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(e^{-t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1 - 1 + sY_2 - 1 = \dfrac{2}{s^2-1} \\ sY_2 - 1 + sY_3 = \dfrac{1}{s-1} \\ sY_3 + sY_1 - 1 = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \qquad (۲)$$

و از حل دستگاه (۲) داریم ،

$$Y_1 = \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s(s^2-1)} + \frac{1}{s}$$

$$Y_2 = \frac{1}{s(s^2-1)} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2-1}$$

$$Y_3 = \frac{2}{s^2-1}$$

و در نتیجه

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2-1} + \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s^2-1)} + \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}$$

$$= \sinh t + \int_0^t \sinh t\,dt + 1$$

$$= \sinh t + \cosh t = e^t$$

$$y_2(t) = e^{-t} \ , \ y_3(t) = 2\sinh t .$$

مجموعه مسائل ۶ . ۹ .

دستگاه معادلات زیر را حل کنید

۱.
$$\begin{cases} y_1'(t)+y_2'(t)-y_1(t)=6-t \\ y_1'(t)+y_2'(t)+y_2(t)=3+\dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$
$$y_1(0)=-5 \quad , \quad y_2(0)=2$$

۲.
$$\begin{cases} 3y_1'(t)+y_2'(t)=6\cos 2t-2\sin 2t \\ y_2'(t)-y_1'(t)+2y_1(t)+2y_2(t)=6e^{2t} \end{cases}$$
$$y_1(0)=1 \quad , \quad y_2(0)=4$$

۳.
$$\begin{cases} y_1''(t)+y_2''(t)-y_2'(t)=6 \\ y_1''(t)+3y_2(t)=9t^2-2 \end{cases}$$
$$y_1(0)=0 \ , \ y_1'(0)=0 \ , \ y_2(0)=0 \ , \ y_2'(0)=-2$$

۴.
$$\begin{cases} y_1''(t)+5y_2''(t)=10 \\ y_2''(t)+3y_2'(t)+y_1'(t)=6t+1 \end{cases}$$
$$y_1(0)=0 \ , \ y_1'(0)=-11 \ , \ y_2(0)=0 \ , \ y_2'(0)=2$$

۵.
$$\begin{cases} y_1''(t)-y_2'(t)=e^t+2t \\ y_2''(t)+4y_2(t)=-4t^2-10 \end{cases}$$
$$y_1(0)=0 \ , \ y_1'(0)=3 \ , \ y_2(0)=0 \ , \ y_2'(0)=0$$

جدول تابع بسل

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.0	−0.2601	0.3391	6.0	0.1506	−0.2767
0.1	0.9975	0.0499	3.1	−0.2921	0.3009	6.1	0.1773	−0.2559
0.2	0.9900	0.0995	3.2	−0.3202	0.2613	6.2	0.2017	−0.2329
0.3	0.9776	0.1483	3.3	−0.3443	0.2207	6.3	0.2238	−0.2081
0.4	0.9604	0.1960	3.4	−0.3643	0.1792	6.4	0.2433	−0.1816
0.5	0.9385	0.2423	3.5	−0.3801	0.1374	6.5	0.2601	−0.1538
0.6	0.9120	0.2867	3.6	−0.3918	0.0955	6.6	0.2740	−0.1250
0.7	0.8812	0.3290	3.7	−0.3992	0.0538	6.7	0.2851	−0.0953
0.8	0.8463	0.3688	3.8	−0.4026	0.0128	6.8	0.2931	−0.0652
0.9	0.8075	0.4059	3.9	−0.4018	−0.0272	6.9	0.2981	−0.0349
1.0	0.7652	0.4401	4.0	−0.3971	−0.0660	7.0	0.3001	−0.0047
1.1	0.7196	0.4709	4.1	−0.3887	−0.1033	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	4.2	−0.3766	−0.1386	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	4.3	−0.3610	−0.1719	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	4.4	−0.3423	−0.2028	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	4.5	−0.3205	−0.2311	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	4.6	−0.2961	−0.2566	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	4.7	−0.2693	−0.2791	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	4.8	−0.2404	−0.2985	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	4.9	−0.2097	−0.3147	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	5.0	−0.1776	−0.3276	8.0	0.1717	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	5.1	−0.1443	−0.3371	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	5.2	−0.1103	−0.3432	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	5.3	−0.0758	−0.3460	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	5.4	−0.0412	−0.3453	8.4	0.0692	0.2708
2.5	−0.0484	0.4971	5.5	−0.0068	−0.3414	8.5	0.0419	0.2731
2.6	−0.0968	0.4708	5.6	0.0270	−0.3343	8.6	0.0146	0.2728
2.7	−0.1424	0.4416	5.7	0.0599	−0.3241	8.7	−0.0125	0.2697
2.8	−0.1850	0.4097	5.8	0.0917	−0.3110	8.8	−0.0392	0.2641
2.9	−0.2243	0.3754	5.9	0.1220	−0.2951	8.9	−0.0653	0.2559

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1.0	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	−0.288	−0.175
1.5	0.382	−0.412	4.0	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2.0	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0.301	7.0	−0.026	−0.303

جدول تابع گاما

n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

جواب مسائل

فصل اول

۱. مرتبه اول

۲. مرتبه دوم

۳. مرتبه اول

۴. مرتبه اول

۵. مرتبه اول

۶. مرتبه اول

۷. مرتبه دوم

۸. مرتبه اول

۹. مرتبه اول

۱۰. مرتبه اول

۱۱. $y''+2y'-3y=0$

۱۲. $xyy'(xy^2+1)=1$

۱۳. $3y^2-x^2=2xyy'$

۱۴. $y=xy'\,Ln\dfrac{x}{y}$

۱۵. $y'''-2y''+y'=0$

فصل دوم

جوابهای مجموعه مسائل ۲-۱

۱. $(cx+1)y^2 = x(y-1)$

۲. $y = c(x^2+1)^2$

۳. $\dfrac{t+1}{y-1} = c\,e^{t+y} \quad , \quad y=1$

۴. $(y+1)e^{-y} = \dfrac{1}{x} + c$

۵. $y = c\,Ln\,x$

۶. $tan^{-1}x - \sqrt{1+y^2} = c$

۷. $y^2 + \cos x = 0$

۸. $\dfrac{1}{1+r} = Ln\,|1-s| + \dfrac{1}{2}$

۹. $5x^2 - 2y^2 = 2$

۱۰. $y = c\tan t$

۱۱. $y = c\,Ln\,x$

۱۲. $\sec y = c\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

۱۳. $y = e^{c\tan\frac{x}{2}}$

۱۴. $y = \tan\dfrac{c}{x}$

۱۵. $e^{-y^2} = x^2 + 2x + c$

۱۶. $tan^{-y}\,y = \dfrac{x^2}{2} + x + c$

۱۷. $x^3y^3 = 6x^2 + c$

۱۸. $y^3 = cx - 1 - Ln\,x$

۱۹. $2x^2 + (2x\,Ln\,y + 1)^2 = c \quad ; \quad x = 0$

۲۰. $y = c\,e^x - 2x - 2$

۲۱. $\cot\dfrac{x-y}{2} + x + c = 0$

۲۲. $\dfrac{1+\sqrt{3}(2x+3y)}{1-\sqrt{3}(2x+3y)} = c\,e^{4\sqrt{3}x}$

جوابهای مجموعه مسائل ۲-۲

۱. $xy^2 - y^3 + \dfrac{2}{3}x^3 = c$

۲. $2\sqrt{\frac{y}{x}} = Ln\,x + c$

۳. $x\,y\,(y - x) = c$

۴. $y = x \sin(Ln\,|x| + c)$

۵. $e^{-y/x} + Ln\,x + c = 0$

۶. $y^2 = 2x^2\,(Ln\,x + c)$

۷. $e^{-y/x} = Ln\,x + c$

۸. $\sin^{-1}\frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = Ln\,x + c$

۹. $y = 2x \tan^{-1} c\,x$

۱۰. $Ln\frac{y}{x} = 2\cot^{-1}(Ln\,x + c)$

۱۱. $y = x \sin^{-1} c\,x$

۱۲. $3y^2 + 2xy - x^2 = c$

۱۳. $(y - 2x)^3 = c\,(y - x)^4$

۱۴. $(x + 2y)(2y + 4 - x)^3 = c$

۱۵. $x - 2y + c = 5\,Ln\,|x - 3y + 8|$

۱۶. $Ln\,(y + 2) + 2\tan^{-1}\frac{y + 2}{x - 3} = c$

۱۷. $\sin\frac{y - 2x}{x + 1} = c\,(x + 1)$

۱۸. $Ln\frac{y + x}{x + 3} = \frac{c}{x + y} + 1$

۱۹. $\sin\frac{y}{x} = x + c$

۲۰. $y^2 = 2x^2 \tan^{-1} x + c\,x^2$

۲۱. $\sin\frac{y}{x} = c\,e^x$

۲۲. $y^2 = x\,Ln\,c\,y^2$

۲۳. $\sqrt{1 + x^2 y^4} = c\,y^2 + 1$

جوابهای مجموعه مسائل ۳.۲

۱. $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = c$

۲. $x^6 y^3 + x^4 y^5 = c$

۳. $x^2(1 - y^2) + 8y^2 = c$

۴. $x^2 \sin 3y = c$

۵. $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$

۶. $x e^{y} + y e^{x} = c$

۷. $r^2 + 2r(\sin Q - \cos Q) = c$

۸. $e^{x} \sin y + 2y \cos x = c \quad , \quad y = 0$

۹. $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$

۱۰. $y \, Ln\, x = 2y - 3x^2 + c$

۱۱. $x^3 \tan y + y^4 + \dfrac{y^3}{x^2} = c$

۱۲. $\dfrac{\sin^2 x}{y} + \dfrac{x^2 + y^2}{2} = c$

۱۳. $x \sin y - y \cos x + Ln\, x y = c$

۱۴. $r^2 Q - r \tan Q = \dfrac{\pi}{4} - 1$

۱۵. $r \cos Q = 2 + Q$

۱۶. $x(x y^2 - 4) + 4 = 0$

۱۷. $(u^2 + v^2)^2 = 4v$

۱۸. $(x e^{x} - 6) y^3 + e^{x} = -5$

جوابهای مجموعه مسائل ۴۰۲

۱. $(x \sin y + y \cos y - \sin y) e^{x} = c \quad , \quad F = e^{x}$

۲. $x^4 y + x y^4 + c x y + 3 = 0 \quad , \quad F = \dfrac{1}{x^2 y^2}$

۳. $x^2 + x y^3 = c y^2 \quad , \quad F = \dfrac{1}{y^3}$

۴. $3x^4 + 4x^3 + 6x^2 y^2 = c \quad , \quad F = x$

۵. $2x e^{x-y} + y^2 = c \quad , \quad F = e^{-y}$

۶. $(y - x + 1)^3 = c x y \quad , \quad F = (x y)^{-4/3}$

۷. $6x^2 y^2 + 8x^3 y + 3x^4 = c \quad , \quad F = x$

۸. $e^{x}(2 \sin y + 2x - 2 + \sin x - \cos x) = c \quad , \quad F = e^{x}$

۹. $y^3 + x^3 Ln\, x = c x^2 + x^3 \quad , \quad F = \dfrac{1}{x^4}$

۱۰. $y = c e^{x} + e^{2x} + 1 \quad , \quad F = e^{-x}$

۱۱. $x y + y \cos y - \sin y = c \quad . \quad F = y$

۱۲. $x e^{2y} - Ln\, y = c. \qquad F = \dfrac{e^{2y}}{y}$

۱۳. $e^{x} \sin y + y^2 = c \qquad F = \sin y$

۱۴. $x^3 y + 3x^2 + y^3 = c \quad , \quad F = x y$

۱۵. $\dfrac{x}{y} + Ln\,\left|\dfrac{y^3}{x^2}\right| = c \quad , \quad F = \dfrac{1}{x\,y^2}$

۱۶. $3\,y^2 - 2\,x^2\,y^3 = c\,x^2 \quad , \quad F = \dfrac{y}{x^3}$

۱۷. $x^2 + y^2 = c\,e^{2\tan^{-1}\frac{y}{x}} \quad , \quad F = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

۱۸. $y + 1 + Ln\,x = c\,x \quad , \quad F = \dfrac{1}{x^2}$

۱۹. $x^2\,y^2\,(\,y^2 - x^2\,) = c \quad , \quad F = x\,y$

جوابهای مجموعه مسائل ۵.۲

۱. $y = e^{-x} + c\,e^{-2x}$

۲. $y = 2\,x^2 + c\,x^{-2}$

۳. $y = -\cos x + c\sin x$

۴. $y = \dfrac{x - \cos x + c}{\sec x + \tan x}$

۵. $y = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sin x\,(\,3 - \sin^2 x\,)}{\cos^3 x} + c\sec^3 x$

۶. $y = c\,(\,x^2 + 2\,x - 1\,)^{1/2} + x$

۷. $y = (\,x^2 + c\,)\,e^{x^2}$

۸. $y = c\,e^{x^2} - \dfrac{1}{2}$

۹. $y = e^{-\sin x}\,(\,c + \int e^{2x + \sin x}\,dx\,)$

۱۰. $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + c}{x}$

۱۱. $y = x\,(\,C - \cos x\,)$

۱۲. $y = e^{-x^2}\,(\,c + \dfrac{x^2}{2}\,)$

۱۳. $y = (\,x + c\,)(\,1 + x^2\,)$

۱۴. $y = (\,x + 1\,)^2\,(\,c + e^x\,)$

۱۵. $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{x^2}$

۱۶. $y = \dfrac{1}{x^2}\sin x$

۱۷. $y = \dfrac{1}{2\,x^2}\,(\,(\,Ln\,x\,)^2 + 6\,)$

۱۸. $y = e^{2x} - e^x + \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{4}$

۱۹. $x = 1 + c\,e^{-y^2/2}$

۲۰. $x = \dfrac{1}{4} + c\,e^{-2y^2}$

۲۱. $x = c\,y + \dfrac{y^3}{2}$

۲۲. $\sin y = c\,e^{-x} + x - 1$

۲۳. $x\sqrt{1+y^2} = c + \sin y$

۲۴. $y = \frac{2x}{x^2+c}$

۲۵. $1 + 2y(1+Ln\,x) = cxy$

۲۶. $y^2 = x\,Ln\,\frac{c}{x}$

۲۷. $y = e^{-2x^2}\left(c + \frac{x^2}{2}\right)^2$

۲۸. $y = (c - 3\tan x)^{-\frac{1}{3}}\sec x$

۲۹. $y^2 = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2-1}$

۳۰. $x^2 + y^2 = 4 + cy$

۳۱. $\frac{1}{x} = y^2 - 2 + ce^{-y^2/2}$

۳۲. $x^2(C - \cos y) = y$

۳۳. $\frac{y}{x^2} = \cos y + y\sin y + c$

۳۴. $e^{y} = ce^{-x} + 2(\sin x - \cos y)$

۳۵. $\sin y = 2 + ce^{-x^2/2}$

۳۶. $(y+1)^2 = \frac{1}{3}x^5 + cx^2$

۳۷. $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{c - \cos^3 x}$

۳۸. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{cx^3 - x}$

۳۹. $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}$

۴۰. $y = 1 - 4x + \frac{2e^{2x}}{c - e^{2x}}$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۲

۱. $\begin{cases} x = 2P + 6P^2 + c \\ y = P^2 + 4P^3 \end{cases}, \quad y = 0$

۲. $\begin{cases} x = 2\sqrt{P^2+1} - Ln(1+\sqrt{P^2+1}) + Ln\,P + c \\ y = P\sqrt{1+P^2} \end{cases}, \quad y = 0$

۳. $\begin{cases} x = e^P + c \\ y = (P-1)e^P \end{cases}, \quad y = -1$

۴. $\begin{cases} x = P^3 - P + 2 \\ y = \frac{3}{4}P^4 - \frac{P^2}{2} + c \end{cases}$

۵. $\begin{cases} x = P\cos P \\ y = P^2\cos P - P\sin P - \cos P + c \end{cases}$

۶. $\begin{cases} x = P^2 - 2P + 2 \\ y = \frac{2}{3}P^3 - P^2 + c \end{cases}$

۷. $y=\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}\sqrt{x}+c$

۸. $$\begin{cases} x = P+\sin P \\ y=\dfrac{P^2}{2}+P\sin P+\cos P+c \end{cases}$$

۹. $$\begin{cases} 4y = x^2+P^2 \\ Ln\,|P-x| = c+\dfrac{x}{P-x} \end{cases}$$

۱۰. $y^2+c^2=2cx \quad , \quad x^2-y^2=0$

۱۱. $x=cy+c^2 \quad , \quad x=-\dfrac{y^2}{4}$

۱۲. $y^3+3cx-c^2=0 \quad , \quad 9x^2+4y^3=0$

۱۳. $c^2x^2-cy+1=0 \quad , \quad y^2-4x^2=0$

۱۴. $y=cx-e^c \quad , \quad y=x(Ln\,x-1)$

۱۵. $y=Cx+\cos C \quad , \quad y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

۱۶. $y=cx+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad , \quad x^{2/3}+y^{2/3}=1$

۱۷. $$\begin{cases} x=\dfrac{c}{P^2}-\dfrac{2}{P^3} \\ y=\dfrac{2c}{P}-\dfrac{3}{P^2} \end{cases}$$

۱۸. $$\begin{cases} x=cP-Ln\,P-2 \\ y=\dfrac{1}{2}cP^2-P \end{cases}$$

۱۹. $$\begin{cases} x=\dfrac{c}{P^2}-\dfrac{\cos P}{P^2}-\dfrac{\sin P}{P} \\ y=\dfrac{2c}{P}-\dfrac{2\cos P}{P}-\sin P \end{cases}$$

۲۰. $$\begin{cases} x=\dfrac{cP^2+2P-1}{2P^2(P-1)^2} \\ y=\dfrac{cP^2+2P-1}{2(P-1)^2}-\dfrac{1}{P} \end{cases} \quad , \quad y=x-1$$

۲۱. $$\begin{cases} x=ce^{-P}-2P+2 \\ y=c(1+P)e^{-P}-P^2+2 \end{cases}$$

۲۲. $$\begin{cases} 3x=2P+\dfrac{c}{\sqrt{P}} \\ 3y=P^2-\dfrac{c}{\sqrt{P}} \end{cases}$$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۲

۱. $y=2\tan 2x$

۲. $y=2e^x-x-1$

۳. $y=e^{x^2}-1$

۴. $y = \tan x \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵. $y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^5}{120}$

۶. $y_3 = \frac{49}{60} + \frac{17}{12} x - \frac{x^2}{6} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}$

۷. $y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}$

۸. $y_3 = \frac{-7}{20} + x + \frac{5}{24} x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{24}$

۹. $y_4 = 4 e^x - \frac{x^3}{6} - x^2 - 3x - 4$

۱۰. $y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + x^2 - \frac{11}{3} x + \frac{53}{12}$

جوابهای مجموعه مسائل ۲.۸

۳. $R^2 - \{(0,0)\}$

۶. $-a \leqslant y \leqslant a \quad , \quad 0 < a < 1$

۷. صفحه xy

۸. $y \neq x$

۹. $y \neq \frac{2n+1}{2} \pi$

۱۰. $x > y^2$

۱۱. تمام y ها به‌غیر از $y = \pm 2$

۱۲. تمام صفحه xy به‌غیر از $y = \pm x$

جوابهای مسائل دوره‌ای فصل ۲

۱. $y = x - \frac{1}{x+c}$

۲. $y = C \frac{\sin x}{x} + \cos x$

۳. $(y-x)^6 (y-3x)^9 = c(y-2x)^{12}$

۴. $x + y - 1 = c e^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

۵. $y = (1 + Ln(\frac{1+e^x}{2})^2)^{1/2}$

۶. $y = e^{\tan \frac{x}{2}}$

۷. $y = -\frac{1}{x}$

۸. $y = (1 + cy + Ln y) \cos x$

۹. $\tan \frac{y}{x} = Ln cx$

۱۰. $y = x e^{1+cx}$

۱۱. $y = 1 + (x-1) Ln c(x-1)$

۱۲. $y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = c$

۱۳. $y^2 = x\,Ln\,c y^2$

۱۴. $c x^4 = y^6 + x^3$

۱۵. $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$

۱۶. $y = (c + x^3)\,Ln\,x$

۱۷. $x = cy - \dfrac{y^2}{2}$

۱۸. $\tan\dfrac{y}{2} = 1 - x + c e^{-x}$

۱۹. $y^2\,Ln\,x = c + \sin x$

۲۰. $y^2 (c - x) \sin x = 1$

۲۱. $\sin y = (x + c) e^x \quad , \quad z = \sin y$

۲۲. $Ln\,y = (x + c) e^x$

۲۳. $xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = c$

۲۴. $x^2 + y e^{x/y} = c$

۲۵. $x^2 \cos^2 y + y^2 = c$

۲۶. $x \sin y + y \cos x + Ln\left|\dfrac{x}{y}\right| = c$

۲۷. $x^2 y^2 - 2x^3 y - x^4 = c$

۲۸. $y^2 + x\,Ln\,x = cx \quad , \quad F = \dfrac{1}{x^2}$

۲۹. $x^2 - \dfrac{7}{y} - 3xy = c \quad , \quad F = \dfrac{1}{y^2}$

۳۰. $y = c e^x + \dfrac{1}{c} \quad , \quad y = \pm 2 e^{x/2}$

۳۱. $y = cx + \dfrac{1}{2}(x^2 - c^2) \quad , \quad y = x^2$

۳۲. $y = \dfrac{1}{2} c x^2 + \dfrac{1}{2c} \quad , \quad y = \pm x$

۳۳. $y = cx - \dfrac{1}{c} \quad , \quad y^2 = -4x$

۳۴. $y = cx + c + \sqrt{c} \;\; ; \;\; y = -\dfrac{1}{4(x+1)}$

۳۵. $(4x^3 + 3xy + c)^2 = 2(2x^2 + y)^3$

۳۶. $(x - c)^2 = y^3 (1 - y) \quad , \quad y = 1$

۳۷. $\begin{cases} x = c e^{-P} - 2P + 2 \\ y = c(1 + P) e^{-P} - P^2 + 2 \end{cases}$

۳۸. $k(x - 1) y - y + 1 = 0$

۳۹. $y = c e^x - 3$

۴۰. $y = c\,e^{-x/2}$

۴۱. $y = \dfrac{c}{x}$

۴۲. $x^2 + y^2 = c\,y$

۴۳. $(x^2 + y^2)^2 = c(y^2 + 2x^2)$

فصل سوم

جوابهای مجموعه مسائل ۲۰۳

۱. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

۲. $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$

۳. $y = c_1 + c_2 e^{3x}$

۴. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

۵. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos \dfrac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \sin \dfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

۶. $y = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$

۷. $y = 2\cos 3x + 3\sin 3x$

۸. $y = 3(1 - 4x)e^{2x}$

۹. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(\dfrac{2\sqrt{11}}{11} \sin \dfrac{\sqrt{11}}{2}x\right)$

۱۰. $y = 5\,e^{-2x} - 4\,e^{-3x}$

۱۱. $y = \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi^2}{2} + \pi - 1 + x\,(1+\pi^2)\right)e^{\pi(1-x)}$

۱۲. $y = \dfrac{1}{2}(2+9x)\,e^{-\frac{5x}{2}}$

۱۴. $y'' - 3y' = 0$

۱۵. $y'' + 2y' + 10y = 0$

۱۶. $y'' + 2y' + y = 0$

۱۷. $y'' - y' - 2y = 0$

۱۸. $y'' - 4y' + 8y = 0$

۱۹. $y'' + 2y' + 2y = 0$

جوابهای مجموعه مسائل ۳۰۳

۱. 2

۲. $-\dfrac{2}{x}$

۳. 0

۴. 0

۵. $-8\sin^3 x$

۸. $(D-1)^3 y = 0$

۹. $D^2(D-2)^2 y = 0$

۱۰. $D(D^2-1)(D^2-4)\,y = 0$

۱۱. $y = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{x}$

۱۲. $y = c_1 + (c_2 + c_3x + c_4x^2)\,e^{2x}$

۱۳. $y = c_1 + c_2x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

۱۴. $y = (c_1 + c_2x)\,e^{x} + (c_3 + c_4x)\,e^{2x}$

۱۵. $y = c_1e^{x} + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x$

۱۶. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\,e^{x}$

۱۷. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)\cos x + (c_4 + c_5x)\sin x$

۱۸. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)\,e^{-3x} + e^{-2x}(c_4\cos 3x + c_5\sin 3x)$

۱۹. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x + c_6x^2)\cos 3x$

$+ (c_7 + c_8x + c_9x^2)\sin 3x + (c_{10} + c_{11}x)\,e^{x} + c_{12}\,e^{-x}$

جوابهای مجموعه مسائل ۴۰۳

۲. $x^2(Ax+B)e^{4x}$

۳. $x(A\cos 4x+B\sin 4x)$

۴. $Ax+B\cos 8x+C\sin 8x$

۵. $x(Ax+B)e^{4x}$

۶. $x(Ax^2+Bx+c)$

۷. $e^x[(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x]$

۸. $xe^{2x}[(Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(A_1x^2+B_1x+C_1)\sin 3x)]$

۹. $x(Ax+B)+x[(A_1x^2+B_1x+C_1)\sin 3x+(A_2x^2+B_2x+C_2)\cos 3x]$

$+x^2e^{4x}[(A_3x^2+B_3x+C_3)\cos 3x+(A_4x^2+B_4x+C_4)\sin 3x]$

۱۰. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x$

۱۱. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-xe^{-2x}$

۱۲. $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{39}e^x(2\sin 3x+3\cos 3x)$

۱۳. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{1}{4}xe^x$

۱۴. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{6}xe^{3x}-\frac{1}{18}\sin 3x$

۱۵. $y=C_1e^{3x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x-\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{12}x-\frac{1}{36}$

۱۶. $y=C_1e^{4x}+C_2\cos x+C_3\sin x-\frac{1}{40}e^{4x}(\sin x+2\cos x)$

۱۷. $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+xe^{-x}+x^2(x-3)$

۱۸. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x}{8}(x-3)e^x-\frac{x}{4}\sin x$

۱۹. $y=\frac{3}{2}[\cos 2x+(x-\frac{2}{3}\pi)\sin 2x+1]$

۲۰. $y=2\cos x+\sin x-\frac{3}{4}(x^2\cos x-x\sin x)$

۲۱. $y=6-\frac{98}{17}e^{-x/2}+e^{-x}-\frac{4}{17}(4\sin 2x+\cos 2x)$

جوابهای مجموعه مسائل ۵۰۳

۱. $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{1}{9}e^x$

۲. $y=(c_1+c_2x)e^x+e^{2x}$

۳. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{2}(1+\cos 2x)$

۴. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{10}e^x-\frac{1}{7}\sin 4x$

۵. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-4x}-\frac{1}{100}(4\sin 2x+3\cos 2x)$

۶. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \, Ln (\sec x + \tan x)$

۷. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \, Ln \cos 2x$

۸. $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + \frac{1}{12} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x^2$

۹. $y = (C_1 + C_2 x) e^x - e^x Ln (1 - x)$

۱۰. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$

۱۱. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2 \sin x - \cos 2x \, Ln (\sec x + \tan x)$

۱۲. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{4}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x \, Ln (\sec x + \tan x)$

$+ \frac{1}{3} \sin 3x \, Ln (cse \, x - \cot x)$

۱۳. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{2}{3} \sin 2x + \frac{1}{6} \cos 3x \, Ln (\sec x + \tan x)$

$+ \frac{1}{6} \sin 3x \, Ln (cse \, x - \cot x)$

۱۴. $y = C_1 \cos \frac{x}{3} + C_2 \sin \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} \, Ln (\sec \frac{x}{3} + \tan \frac{x}{3}) - 2$

۱۵. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - Ln \cos x - \sin x \, Ln (\sec x + \tan x)$

۱۶. $y = (C_1 + C_2 x) e^{x/2} + \frac{x^2}{16} e^{x/2} (-3 + 2 Ln x)$

۱۷. $y = C_1 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} + 1$

۱۸. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۳

۱. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x$

۲. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2 e^x$

۳. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{10} (e^{ix} - 3i \, e^{ix})$

۴. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{10} (\sin x - 3 \cos x)$

۵. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{10} (3 \sin x + \cos x)$

۶. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} (\sin x - 3 \cos x) + e^x + 4$

۷. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - x e^x - 2 e^{-x}$

۸. $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{5} e^{2x} (3 \sin x + \cos x)$

۹. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3 + C_4 x) e^{-x} + x - \frac{1}{4} \sin x$

۱۰. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} x^3$

۱۱. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-x}$

۱۲. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x)$

۱۳. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{1}{6}x^3)e^x$

۱۴. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+[\frac{1}{12}+\frac{1}{520}(9\cos 2x-7\sin 2x)]e^{2x}$

۱۵. $y=C_1+C_2e^{\frac{5x}{4}}+\frac{e^{-x}}{729}(81x^2+234x+266)$

۱۶. $y=C_1e^x+c_2\sin x+C_3\cos x-(\frac{1}{10}e^{-3x}+2x^4+8x^3+48)$

۱۷. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+C_3e^x+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۳

۱. $y_p=4x^2e^{-2x}$

۲. $y_p=-\frac{9}{2}xe^{-3x}$

۳. $y_p=-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x)e^{-3x}$

۴. $y_p=\frac{x}{2}$

۵. $y_p=\frac{1}{3}(x^2-x+\frac{1}{3})e^x$

۶. $y_p=\frac{1}{2}x\sinh x$

۷. $y_p=-\frac{x}{5}e^{-4x}-(\frac{x}{6}+\frac{1}{36})e^{-x}$

۸. $y_p=x(x\sin x+\cos x)$

۹. $y_p=\frac{1}{8}(1+x\sin 2x)$

۱۰. $y_p=\frac{1}{6}x^3e^x$

۱۱. $y_p=\frac{1}{24}x^4+(\frac{1}{2}x-4)xe^x$

۱۲. $y_p=e^x(x^2-x)$

۱۳. $y_p=-\frac{1}{8}e^x(\sin 2x+\cos 2x)$

۱۴. $y_p=2x\cos x+x^2\sin x$

۱۵. $y_p=\frac{x^2}{4}\sin x+(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6})\cos x$

۱۶. $y_p=e^{-x}(-x^2\cos x+4x\sin x+6\cos x)$

۱۷. $y_p=e^x(\frac{x}{8}-\frac{1}{4})-\frac{x}{8}\cos x$

جوابهای مجموعه مسائل ۸.۳

۱. $y=-Ln\cos x+C_1x+C_2$

۲. $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$

۳. $y=\frac{1}{6}x^3 Ln x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$

۴. $C_1^2y=C_1x-Ln|C_1x+1|+C_2$

۵. $y=(C_1x - C_1^2)e^{1+\frac{x}{c_1}} + C_2$

۶. $y = C_1 \sin x + C_2 - x - \frac{1}{2}\sin 2x$

۷. $y = C_1 Ln|x+C_1| + C_2$

۸. $y = Ln|x - C_1| + C_2$

۹. $y = e^x(x-1) + C_1x^2 + C_2$

۱۰. $y = \pm\frac{1}{2}[x(C_1^2 - x^2)^{1/2} + C_1^2 \sin^{-1}\frac{x}{C}] + C_2$

۱۱. $C_1^2 y = (C_1^2x^2+1)\tan^{-1}C_1x - C_1x + C_2$

۱۲. $4C_1 y = 4 + (C_1x+C_2)^2$

۱۳. $y=\pm(C_1x+C_2)^{1/2}$

۱۴. $y = C\,,\quad x = \frac{1}{C_1} Ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| + C_2$

۱۵. $y = 1+\frac{1}{C_1x+C_2}$

۱۶. $y=\pm\sin(C_1\pm x)+C_2x+C_3$

۱۷. $y = C_2\sec^2(x+C_1)$

۱۸. $y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$

۱۹. $y=C_1x+C_2x^{-1}$

۲۰. $y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$

۲۱. $y = C_1 e^{-x^2/2}\int e^{x^2/2}dx + C_2 e^{-x^2/2}$

۲۲. $y = x^2(C_1 + C_2 Ln\, x)$

۲۳. $y=C_1x^3+C_2x$

۲۴. $y=C_1\cos 2Lnx + C_2 \sin 2Lnx$

۲۵. $y = x^2(3+C_1\cos Lnx + C_2 \sin Lnx)$

۲۶. $y=C_1(x+2)+C_2(x+2)^{-3}$

۲۷. $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} - 2Lnx + \frac{1}{3}$

۲۸. $y=C_1x+C_2x^{-1}-4$

۲۹. $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{6} x^4$

۳۰. $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{12}x^{-2}$

۳۱. $y=C_1(x^2-1)+C_2x+x\,Lnx$

۳۲. $y=C_1(x^2-4)+C_2x+4$

۳۳. $y = C_1 x + C_2 \cos x - \sin x$

۳۴. $y = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x + x e^{2x}$

۳۵. $y = C_1 e^{2x} (x-2)^2 + C_2 e^{2x}$

۳۶. $y = e^{x^2} (C_1 \cos\sqrt{2}\, x + C_2 \sin\sqrt{2}\, x) + \frac{1}{2} x e^{x^2}$

۳۷. $y = e^{2x} [C_1 \cos Ln\, x + C_2 \sin Ln\, x + e^{-x}]$

فصل چهارم

جوابهای مجموعه مسائل ۱.۴

۱. $R = \infty$ ۲. واگرا   ۳. $0 < x \leq 2$ همگرا

۴. $|x| < 2$ ، $R = 2$ ۵. $R = \infty$ ۶. $R = 3$

۷. $-5 < x < -3$ ۸. $R = 1$ ۹. مجموعه‌همگرایی عبارت‌است‌از: $\{-1\}$

۱۰. $Ln\, x = Ln\, 2 + \frac{x-2}{1!} \times \frac{1}{2} - \frac{(x-2)^2}{2!} \times \frac{1}{2^2} + \cdots$

۱۱. $x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \cdots$ ، فاصله همگرایی $(-1, 1]$

۱۲. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} (2x)^{2n}$

۱۳. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n}$

۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \ , \ R = 1$

۱۵. $$2+\frac{1}{4}(x-4)+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)\times 4^{n}}(x-4)^{n}$$

جوابهای مجموعه مسائل ۲.۴

۱. $$y=C_0(1-x^2)+C_1\left(x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{1680}+\cdots\right),\quad R=\infty$$

۲. $$y=C_0\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{96}+\frac{5x^4}{1536}+\cdots\right)+C_1\left(x-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{192}+\cdots\right),$$

$$R=2\sqrt{2}$$

۳. $$y=C_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)+C_1\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\cdots\right)$$

$$+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}+\cdots,\quad R=\infty$$

۴. $$y=C_0\left(1+(x-1)^2-\frac{2(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{3}+\cdots\right)+C_1\left((x-1)-\right.$$

$$\left.\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots\right),\quad 0<x<2$$

۵. $$y=C_0\left(1+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{6}(x-1)^4+\cdots\right)$$
$$+C_1\left((x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots\right)$$

۶. $$y=C_0\left(1-x^2+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{30}x^6+\cdots\right)$$

$$+C_1\left(x-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{160}x^5-\frac{19}{1920}x^7+\cdots\right)$$

۷. $$v=C_0\left(1-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{90}x^6+\frac{1}{3360}x^8+\cdots\right)$$

$$+C_1\left(x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{144}x^7-\cdots\right)$$

۸. $$y=C_0\left(1-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{672}x^8-\cdots\right)+C_1\left(x-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{1440}x^9-\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{60}x^6-\frac{1}{252}x^7-\frac{1}{672}x^8+\cdots$$

۹. $$y=C_0\left(1-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{168}x^8-\cdots\right)+C_1\left(x-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{360}x^9-\cdots\right)$$

۱۰. $$y=1+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^4-\frac{7}{120}(x-1)^5$$

۱۱. $$y=\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$+\frac{1}{60}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5$$

۱۲. $$y=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{60}x^5+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{1680}x^7$$

۱۳. $$y=2+2x+\frac{5}{2}x^2+x^3+\frac{7}{12}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{11}{180}x^6+\frac{1}{70}x^7$$

۱۴. $$y=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7$$

۱۵. $$y=1+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{24}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$-\frac{1}{40}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5$$

۱۶. $$y=1+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$+\frac{1}{120}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5$$

جوابهای مجموعه مسائل ۳.۴

۱. الف: $y=C_0\left(1+\frac{(1+1)}{2!}x^2+\frac{(1+1)(1-2)(1+3)}{4!}x^4-+\cdots\right)+C_1x$

ب: $y=C_0(1-3x^2)+C_1\left(x-\frac{(2-1)(2+2)}{3!}x^3\right.$

$$\left.+\frac{(2-3)(2-1)(2+2)(2+4)}{5!}x^5-+\cdots\right)$$

۲. الف: $-\frac{4}{5}P_0(x)+P_1(x)-\frac{10}{7}P_2(x)+\frac{8}{35}P_4(x)$

ب: $-2P_0+\frac{8}{5}P_1+\frac{2}{5}P_3$

۳. الف: 0 ب: 0 پ: 0

۴. الف: $f(x)=\frac{1}{2}P_0+\frac{3}{4}P_1-\frac{7}{16}P_3+\frac{11}{32}P_5-+\cdots$

ب: $f(x)=P_0+\frac{7}{4}P_1+\frac{5}{8}P_2-\frac{7}{16}P_3+\cdots$

۵. $Q_3(x)=\frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}$

۶. $P_4^2(x)=(1-x^2)\left(\frac{105}{2}x^2-\frac{15}{2}\right)$

$$P_4^3(x)=105x(1-x^2)^{3/2}$$

۷. $Q_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{x}{1-x^2}\right]$

$$Q_1^2(x)=\frac{2}{1-x^2}$$

۸.

$-P_0+\frac{3}{5}P_1+\frac{2}{5}P_3$, $\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{اگر } m>3\\ \frac{4}{35} & \text{اگر } m=3\\ 0 & \text{اگر } m=2\\ \frac{2}{5} & \text{اگر } m=1\\ -2 & \text{اگر } m=0\end{cases}$

جوابهای مجموعه مسائل ۴.۴

۱.

$$y=Ax\left(1+\frac{x}{5}-\frac{2}{35}x^2+\frac{22}{945}x^3-+\cdots\right)+$$

$$Bx^{-1/2}\left(1-\frac{19}{4}x-\frac{209}{32}x^2+\frac{1045}{1152}x^3-+\cdots\right)$$

۲.

$$y=Ax\left(1+\frac{x}{8}+\frac{5}{88}x^2+\frac{13}{1848}x^3+\cdots\right)+$$

$$Bx^{-2/3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{5}{9}x^2+\frac{29}{324}x^3+\cdots\right)$$

۳.

$$y=Ax\left[1-\frac{1}{9\times7}x^3+\frac{1}{9^2\times2\times7\times12}x^6-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{9^n\times n!\times7\times12\times\cdots\times(5n+2)}x^{3n}+\cdots\right]$$

$$+Bx^{-1/5}\left[1-\frac{1}{9\times3}x^3+\frac{1}{9^2\times2!\times3\times8}x^6-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{9^n\times n!\times3.8\times\cdots\times(5n-2)}x^{3n}+\cdots\right]$$

۴.

$$y = A\left[1 - \frac{1}{2\times 7}x^2 + \frac{1}{2\times 4\times 7\times 11}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2\times 4\times\cdots\times 2n)[7\times 11\times\cdots\times(4n+3)]}x^{2n} + \cdots\right]$$

$$+ B x^{-3/2}\left[1 - \frac{1}{2\times 7}x^2 + \frac{1}{1\times 5\times 2\times 4}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{[1\times 5\times\cdots\times(4n-3)][2\times 4\times\cdots\times 2n]}x^{2n} + \cdots\right]$$

۵.

$$y = A\left(1 + x - x^2 + \frac{11}{12}x^3 - + \cdots\right) + B x^{5/3}\left[1 - \frac{7}{8}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{23}{24}x^3 + - \cdots\right]$$

۶.

$$y = A x^{-1}(2+x) + B x^{1/4}\left[1 + \frac{3}{9\times 4^2}x - \frac{3\times 5}{9\times 13\times 4^2\times 2!}x^2 + - \cdots\right]$$

۷.

$$y_1 = 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{(2!)^2} - \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^n}{(n!)^2} + \cdots$$

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + 4x - 3x^2 + \frac{22}{27}x^3 - \cdots$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۸.

$$y_1 = 1 - \frac{2}{2^2}x^2 + \frac{2^2}{2^4(2!)^2}x^4 - + \cdots$$

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{32}x^4 + \frac{11}{1728}x^6 - + \cdots$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۹.

$$y_1 = x^2\left[1 - 4x + \frac{1}{(2!)^2}(4x)^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}(4x)^n + \cdots\right]$$

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + x^2\left(8x - 12x^2 + \frac{176}{27}x^3 - + \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۰.

$$y_1 = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots\right) = x e^x$$

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x - x\left(x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۱.

$$y_1 = x^2\left[1 + 4x + 6x^2 + \cdots + \frac{2^n(n+1)}{n!}x^n + \cdots\right]$$

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x - x^2\left(6x + 13x^2 + \frac{124}{9}x^3 + \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۲.

$$y_1 = x,\quad y_2 = x \operatorname{Ln} x - x^3\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2\times 4^2}x^2 + \frac{1}{2\times 4\times 6^2}x^4 - + \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۳.

$$y_1 = x^2 e^{-x},\quad y_2 = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + - \cdots$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۴.

$$y_1 = x^2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}x^2 + \cdots\right)$$

$$y_2 = x^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۵.

$$y_1 = x\left(3 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{3}{3^7}x^4 + \frac{1}{2^9}x^6 + \cdots\right)$$

$$y_2 = -\frac{1}{16}y_1 \operatorname{Ln} x + x^{-3}\left(1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{19}{2^6}x^4 + \frac{5}{2^8}x^6 + \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

۱۶.

$$y_1 = x^4 \left(1 - 4x + \frac{3.4.5}{3!}x^2 - + \cdots\right)$$

$$y_2 = -3y_1 \operatorname{Ln} x + x\left(1 + \frac{1}{2}x + x^2 - 10x^3 + \cdots\right)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

جوابهای مجموعه مسائل ۵.۴

۱. الف. $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ ب. 120 پ. $\frac{\pi}{2}$

۲. $-\frac{3!}{2^4}$

۳. $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

۴. $\frac{16}{7^3}$

۵. $\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4^{5/2}}\sqrt{\pi}$

۶. $\frac{1}{2\times(3)^{3/4}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

۷. $\frac{1}{2^{7/5}}\,\Gamma\left(\frac{12}{5}\right)$

۸. $\sqrt{\pi}$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۴

۵. $J_3(x) = \left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x)$

۶.

الف: $x^3 J_3(x) + C$

ب: $2J_0(1) - 3J_1(1)$

پ: $x^2 J_1(x) + xJ_0(x) - \int J_0(x)\,dx$

۷. $J_5(x) = \left(\frac{384}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1\right)J_1(x) - \left(\frac{192}{x^3} - \frac{12}{x}\right)J_0(x)$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۴

۳. آ. $y = AJ_6(2e^{x/2}) + BY_6(2e^{x/2})$

ب. $y = AJ_1(2e^{x/2}) + BY_1(2e^{x/2})$

پ. $y = AJ_{2/3}(2e^{x/2}) + BY_{2/3}(2e^{x/2})$

۴. $y = AJ_0(e^x) + BY_0(e^x)$

۵. $y = AJ_2(3x) + BY_2(3x)$

۶. $y = AJ_1(\sqrt{3}x) + BY_1(\sqrt{3}x)$

۷. $y = AJ_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}) + BY_{\sqrt{3}}(\sqrt{x})$

۸. $y = AJ_{\sqrt{8}}(x^2) + BY_{\sqrt{8}}(x^2)$

۹. $y = AJ_1(x^2) + BY_1(x^2)$

۱۰. $y = x^{-2}[\,A\,J_2(x) + B\,Y_2(x)\,]$

۱۱. $y = x^{-1}[\,A\,J_1(x) + B\,Y_1(x)\,]$

۱۲. $y = x^{1/2}[\,A\,J_{\sqrt{2}}(x) + B\,Y_{\sqrt{2}}(x)\,]$

۱۳. $y = x^{1/2}[\,A\cdot J_1(x) + B\,Y_1(x)\,]$

۱۴. $y = x^2[\,A\,J_2(x^2) + B\,Y_2(x^2)\,]$

۱۵. $y = x^3[\,A\,J_3(x^3) + B\,Y_3(x^3)\,]$

۱۶. $y = x^{1/2}[\,A\,J_{1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) + B\,Y_{1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)\,]$

۱۷. $y = x^{1/2}[\,A\,J_{1/6}(x^3) + B\,Y_{1/6}(x^3)\,]$

۱۸. $y = x^{1/2}A\,J_{1/3}(\frac{8}{3}x^{3/2}) + B\,Y_{1/3}(\frac{8}{3}x^{3/2})\,]$

۱۹. $y = x^2[\,A\,J_1(2x^3) + B\,Y_1(2x^3)\,]$

۲۰. $y = x[\,A\,J_2(3x^2) + B\,Y_2(3x^2)\,]$

۲۱. آ. $y = A\,I_2(x) + B\,K_2(x)$

ب. $y = A\,I_1(x) + B\,K_1(x)$

فصل پنجم

جوابهای مجموعه مسائل فصل ۵

۱. $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}\ ,\ y_2 = C_1 e^{2x} - 4C_2 e^{-3x}$

۲. $y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} e^x\ ,\ y_2 = 2C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-x} - 2e^x$

۳. $y_1 = C_1 + C_2 x + \frac{4}{3}x^3\ ,\ y_2 = \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + (2C_2 + 1)x + 2C_1 - \frac{1}{2}C_2$

۴. $y_1 = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}\frac{1}{13}(-7\cos x + 4\sin x)$

$$y_2 = e^x[\,(C_1 - C_2)\cos 2x + (C_1 + C_2)\sin 2x\,]$$
$$-\,e^{-x}\frac{2}{13}(\,8\cos x + \sin x\,)$$

۵. $y_1 = e^{-2x}(\cos x + 3\sin x)\ ,\ y_2 = \frac{1}{5}e^{-2x}(10\sin x)$

۶. $y_1 = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}\ ,\ y_2 = 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 e^x$

۷.
$$y_1 = A\,e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \quad , \quad y_2 = B - \frac{3}{2}A\,e^{-2x} + \frac{1}{4}(x^2 + x)$$

۸.
$$y_1 = -e^{x} - 2e^{-x} - C_1 \ , \ y_2 = 2e^{x} + e^{-x} + C_1$$

فصل ششم

جوابهای مجموعه مسائل ۱.۶

۱.
$$F(s) = 5\frac{4!}{s^5} - 3\frac{2!}{s^3} + \frac{6}{s}$$

۲.
$$F(s) = \frac{4}{s-3} + \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s}$$

۳.
$$F(s) = \cos b\,\frac{s}{s^2+a^2} - \sin b\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

۴.
$$F(s) = \cosh b\,\frac{a}{s^2-a^2} + \sinh b\,\frac{s}{s^2-a^2}$$

۵.
$$F(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{s}{s^2-4} + \frac{3}{s^2+9}$$

۶.
$$F(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-s}$$

۷.
$$F(s) = \frac{3}{s^2+9}\left(e^{-\pi s} + 1\right) + \frac{3}{s}\,e^{-\pi s}$$

۸.
$$F(s) = 2\frac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{3}{s}$$

۹. $f(t)=\frac{2}{3!}\,t^3+\frac{1}{\Gamma(5/2)}\,t^{3/2}$

۱۰. $f(t)=1+\sin t$

۱۱. $f(t)=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\,t^{1/2}-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\,t^{-1/2}$

۱۲. $f(t)=\frac{1}{2}\,t^2+4\cosh t+\frac{3}{2}\,\sin 2t$

۱۳. $f(t)=2e^t-2\cos t+\sin t$

جوابهای مجموعه مسائل ۲.۶

۱. $F(s)=\frac{10s}{(s^2+25)^2}$

۲. $F(s)=\frac{1}{(s-2)^2}$

۳. $F(s)=\frac{8s}{(s^2-16)^2}$

۴. $F(s)=\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$

۵. $F(s)=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{s^2+4}+\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right]$

۶. $F(s)=\frac{s^2}{(s^2+9)^2}$

۷. $y=\cos 2t+\frac{1}{2}\,\sin 2t$

۸. $y=\cos 3t+\frac{1}{5}\,\sin 3t+\frac{1}{5}\,\sin 2t$

۹. $y=e^t-e^{-2t}$

۱۰. $y=\frac{4}{5}\,e^{3t}+\frac{1}{5}\,e^{-2t}$

۱۱. $F(s)=\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})$

۱۲. $F(s)=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}$

۱۳. $F(s)=\frac{1}{s}\,e^{-s}-\frac{1}{s^2}\,e^{-s}+\frac{1}{s^2}\,e^{-2s}$

۱۴. $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}\,e^{-2s}-\frac{1}{s^2}\,e^{-2s}+\frac{1}{s^2}\,e^{-s}$

جوابهای مجموعه مسائل ۳.۶

۱. $\frac{3!}{s^5}-\frac{4}{s^2+1}$

۲. $\frac{1}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}-\frac{2}{s^2-1}\right)$

۳. $\frac{1}{s}\left(\frac{6}{s^2+9}+\frac{4}{s+1}-\frac{s}{s^2-4}\right)$

۴. $\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\,\sin 2t\right)$

۵. $\frac{1}{9}(1+3t-\cos 3t-\sin 3t)$

۶. $\frac{1}{3}\cosh 3t-\frac{4}{27}\sinh 3t+\frac{4}{9}t-\frac{1}{3}$

۷. $\frac{1}{125}e^{5t}-\frac{t^2}{10}-\frac{t}{25}-\frac{1}{125}$

۸. $y = \sin t - 2\cos t + 2$

۹. $y = 1 + t - e^{-t}$

۱۰. $y = \dfrac{t}{9} - \dfrac{1}{27}\sin 3t$

۱۱. $v = \dfrac{1}{2}e^{2t} + e^{-t} - \dfrac{3}{2}$

۱۲. $y = \dfrac{1}{63}e^{3t} - \dfrac{1}{112}e^{-4t} - \dfrac{t}{12} - \dfrac{1}{144}$

جوابهای مجموعه مسائل ۴.۶

۱. $F(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(s+1)^{3/2}} - \dfrac{5}{(s+1)^2+1} - \dfrac{2}{s+1}$

۲. $F(s) = \dfrac{4}{s^2 - 6s - 7}$

۳. $F(s) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{s-2}{(s-2)^2+1} - \dfrac{s+2}{(s+2)^2+1}\right]$

۴ $\dfrac{1}{2}t^2 e^{-4t} - \dfrac{1}{3}t^3 e^{t}$

۵. $e^{t}(\cos t + \sin t)$

۶. $2te^{-t} + e^{-t} - 1$

۷. $y = 3e^{-t}\sin 4t$

۸. $y = 3e^{t/2}\cos 3t$

۹. $y = e^{-t/2}\cos t$

۱۰. $y = e^{-2t}(4t^2 + 3t + 1)$

۱۱. $\dfrac{2}{s}(1 - e^{-\pi s})$

۱۲. $\dfrac{1}{s}(e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})$

۱۳. $\dfrac{1}{s}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s})$

۱۴. $\dfrac{1}{s^2}e^{-\pi s}$

۱۵. $e^{-2s}\left(\dfrac{6}{s^4} + \dfrac{8}{s} + \dfrac{12}{s^3} + \dfrac{12}{s^2}\right)$

۱۶. $-e^{-\pi s}\dfrac{1}{s^2+1}$

۱۷. $e^{-(3+s)}\dfrac{1}{s+3}$

۱۸. $\dfrac{6}{s^4} - e^{-s}\left(\dfrac{6}{s^4} + \dfrac{1}{s} + \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{3}{s^2}\right)$

۱۹. $\dfrac{4s}{s^2+4}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$

۲۰. $\dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s-3} - e^{-\pi s}\left(\dfrac{2}{s} - e^{3\pi}\dfrac{1}{s-3}\right)$

۲۱. $\dfrac{1}{6}(t-1)^3 u_1(t)$

۲۲. $\dfrac{1}{2}u_2(t)\sin 2(t-2)$

۲۳. $\dfrac{1}{2}(1 - e^{2t}) - \dfrac{1}{2}(1 - e^{2(t-1)})u_1(t)$

۲۴. $\frac{1}{4} e^{-2(t-\pi)} \sin 4t\, u_{\pi}(t)$

۲۵. $u_{-3}(t) \cosh 3(t+3)$

جوابهای مجموعه مسائل ۵.۶

۱. $\frac{2s(s^2+12)}{(s^2-4)^3}$

۲. $\frac{40s}{(s^2+16)^2}+\frac{4s(3-s^2)}{(s^2+1)^3}$

۳. $\frac{32+2s^2}{(s^2-16)^2}+\frac{36s^2+48}{(s^2-4)^3}$

۴. $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

۵. $\frac{6(s-4)}{(s^2-8s+25)^2}$

۶. $\left[\frac{1}{s+1}\cdot\frac{5}{s^2-2s+26}\right]''$

۷. $f(t)=\frac{1}{t}(1+e^{-t}-2\cos t)$

۸. $f(t)=\frac{2}{t}(1-\cos 2t)$

۹. $\frac{1}{t} e^{-4t}\sin t$

۱۰. $\int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$

۱۱. 0 ۱۲. 0 ۱۳. $\frac{3}{100}$

جوابهای مجموعه مسائل ۶.۶

۱. $\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}$

۲. $\ln\frac{s^2-9}{s^2}$

۳. $\ln\frac{s+4}{s+2}$

۷. $\frac{1}{2} t\sin t$

۸. $\frac{t}{2} e^{-2t}\sin t$

۹. $\frac{t}{4}\sinh 2t$

۱۰. $\frac{1}{s-2}\cot^{-1}\left(\frac{s-1}{2}\right)$

۱۱. $s\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}+\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$

۱۲. $\frac{1}{2s^2}\ln\frac{s-2}{s-4}+\frac{1}{s(s-2)(s-4)}$

۱۳. $\frac{1}{s^2}\ln\frac{((s+3)^2+1)^{1/2}}{s+3}-\frac{1}{s}\cdot\frac{s+3}{(s+3)^2+1}+\frac{1}{s(s+3)}$

جوابهای مجموعه مسائل ۷.۶

۱. $\frac{1}{2} t\sin t$

۲. $\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$

۳. $-\frac{9}{39}\left(\cos 3t+\frac{2}{3}\sin 3t-e^{2t}\right)$

۴. $-\frac{1}{6}\sin 4t+\frac{1}{3}\sin 2t$

۵. $1-\cos t$

۶. $\frac{1}{25}(e^{5t}-5t-1)$

۷. $\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)$

۸. $e^{-t}\int_0^t \frac{e^{2\lambda}-e^{\lambda}}{\lambda}\,d\lambda$

۹. $\int_0^t \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\sin\lambda\cos(t-\lambda)\,d\lambda$

۱۰. $\frac{1}{2}(\sin t-\cos t+e^{-t})$

۱۱. $\frac{3!}{s^4(s^2+1)}$

۱۲. $\frac{5!}{s^6(s-3)}$

۱۳. $\frac{3!\times 5!}{s^{10}}$

۱۴. $y(t)=t^2+\frac{1}{12}t^4$

۱۵. $y(t)=\cos t$

۱۶. $y(t)=e^{-t}(1-t)^2$

۱۷. $y(t)=e^{-t}(1-t)$

جوابهای مجموعه مسائل ۸.۶

۱. $\frac{se^{s\pi/4}}{(s^2+16)(e^{s\pi/4}-1)}$

۲. $\frac{\pi}{s}\coth \pi s-\frac{1}{s^2}$

۳. $\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})},\ s>0$

۴. $\frac{2e^{3s}}{s(e^{3s}+1)}$

۵. $\frac{s^2+8(e^{\frac{1}{2}s\pi}+1)}{s(1+e^{\frac{1}{2}s\pi})(s^2+16)}$

۶. $\frac{(e^{\frac{1}{2}s}-1)^2}{s^2(1+e^{s})}$

۷. $\frac{e^{s}-se^{s/2}-1}{s^2(e^{s}-1)},\ \frac{e^{s}-se^{s/2}-1}{s^2(e^{s}-1)(1-e^{-s/2})},\ \frac{e^{s}-se^{s/2}-1}{s^2(e^{s/2}-1)^2}$

۸. $\frac{(1-e^{-s/2})^2}{s^2(1-e^{-2s})},\ \frac{e^{s/2}-1}{s^2(1+e^{s/2})}$

۹. $\frac{1}{s^2+1}\coth\frac{s\pi}{2}$

جوابهای مجموعه مسائل ۹.۶

۱. $y_1=t^2+t-5,\ y_2=\frac{1}{3}t^3-t^2+2$

۲. $y_1=3+\sin 2t-\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{2t}$

$y_2=-3+\cos 2t+\frac{9}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{2t}$

۳. $y_1=t^3-t^2,\ y_2=3t^2-2t$

۴. $y_1=5-t-5e^{2t},\ y_2=e^{2t}+t^2-1$

۵. $y_1=\sin 2t+e^{t}-1,\ y_2=2\cos 2t-t^2-2$

$f(t)$	$F(s)$
۱	$\frac{۱}{s}$
t	$\frac{۱}{s^{۲}}$
$\frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!},\quad ۰!=۱$	$\frac{۱}{s^n}\quad n=۱,۲,۳,\ldots$
$\frac{t^{n-۱}}{\Gamma(n)}$	$\frac{۱}{s^n}\quad n>۰$
e^{at}	$\frac{۱}{s-a}$
$\frac{t^{n-۱}e^{at}}{(n-۱)!},\quad ۰!=۱$	$\frac{۱}{(s-a)^n}\quad n=۱,۲,۳,\ldots$
$\frac{t^{n-۱}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{۱}{(s-a)^n}\quad a>۰$
$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{۱}{s^{۲}+a^{۲}}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}}$
$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\frac{۱}{(s-b)^{۲}+a^{۲}}$
$a^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^{۲}+a^{۲}}$
$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{۱}{s^{۲}-a^{۲}}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^{۲}-a^{۲}}$
$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$	$\frac{۱}{(s-b)^{۲}-a^{۲}}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^{۲}-a^{۲}}$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$	$\frac{۱}{(s-a)(s-b)}\quad a\neq b$
$\frac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}\quad a\neq b$
$\frac{\sin at - at\cos at}{۲a^{۳}}$	$\frac{۱}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$
$\frac{t\sin at}{۲a}$	$\frac{s}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$
$\frac{\sin at + at\cos at}{۲a}$	$\frac{s^{۲}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$
$\cos at - \frac{۱}{۲}at\sin at$	$\frac{s^{۳}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$
$t\cos at$	$\frac{s^{۲}-a^{۲}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$
$\frac{at\cosh at - \sinh at}{۲a^{۳}}$	$\frac{۱}{(s^{۲}-a^{۲})^{۲}}$
$\frac{t\sinh at}{۲a}$	$\frac{s}{(s^{۲}-a^{۲})^{۲}}$
$\frac{\sinh at + at\cosh at}{۲a}$	$\frac{s^{۲}}{(s^{۲}-a^{۲})^{۲}}$
$\cosh at + \frac{۱}{۲}at\sinh at$	$\frac{s^{۳}}{(s^{۲}-a^{۲})^{۲}}$
$t\cosh at$	$\frac{s^{۲}+a^{۲}}{(s^{۲}-a^{۲})^{۲}}$
$\frac{(۳-a^{۲}t^{۲})\sin at - ۳at\cos at}{۸a^{۵}}$	$\frac{۱}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳}}$
$\frac{t\sin at - at^{۲}\cos at}{۸a^{۳}}$	$\frac{s}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳}}$
$\frac{(۱+a^{۲}t^{۲})\sin at - at\cos at}{۸a^{۳}}$	$\frac{s^{۲}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳}}$
$\frac{۳t\sin at + at^{۲}\cos at}{۸a}$	$\frac{s^{۳}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳}}$

$f(t)$	$F(s)$
$J_۰(at)$	$\frac{۱}{\sqrt{s^۲+a^۲}}$
$I_۰(at)$	$\frac{۱}{\sqrt{s^۲-a^۲}}$
$a^n J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^۲+a^۲}-s)^n}{\sqrt{s^۲+a^۲}} \quad n>-۱$
$a^n I_n(at)$	$\frac{(s-\sqrt{s^۲-a^۲})^n}{\sqrt{s^۲-a^۲}} \quad n>-۱$
$J_۰(a\sqrt{t(t+۲b)})$	$\frac{e^{bts}-\sqrt{s^۲+a^۲}}{\sqrt{s^۲+a^۲}}$
$\begin{cases} J_۰(a\sqrt{t^۲-b^۲}) & t>b \\ ۰ & t<b \end{cases}$	$\frac{e^{-b}\sqrt{s^۲+a^۲}}{\sqrt{s^۲+a^۲}}$
$\frac{tJ_۱(at)}{a}$	$\frac{۱}{(s^۲+a^۲)^{۳/۲}}$
$tJ_۰(at)$	$\frac{s}{(s^۲+a^۲)^{۳/۲}}$
$J_۰(at)-atJ_۱(at)$	$\frac{s^۲}{(s^۲+a^۲)^{۳/۲}}$
$\frac{tI_۱(at)}{a}$	$\frac{۱}{(s^۲-a^۲)^{۳/۲}}$
$tI_۰(at)$	$\frac{s}{(s^۲-a^۲)^{۳/۲}}$
$\frac{\cos ۲\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$
$N(t) = null\ function$	۰
$\delta(t)$	۱
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{(۳-a^۲t^۲)\sin at+۵at\cos at}{۸a}$	$\frac{s^۲}{(s^۲+a^۲)^۳}$
$\frac{(s-a^۲t^۲)\cos at-۷at\sin at}{۸}$	$\frac{s^۵}{(s^۲+a^۲)^۳}$
$\frac{t^۲\sin at}{۲a}$	$\frac{۳s^۲-a^۲}{(s^۲+a^۲)^۳}$
$\frac{۱}{۲}t^۲\cos at$	$\frac{s^۳-۳a^۲s}{(s^۲+a^۲)^۳}$
$\frac{۱}{۶}t^۳\cos at$	$\frac{s^۴-۶a^۲s^۲+a^۴}{(s^۲+a^۲)^۴}$
$\frac{t^۳\sin at}{۲۴a}$	$\frac{s^۳-a^۲s}{(s^۲+a^۲)^۴}$
$\frac{(۳+a^۲t^۲)\sinh at-۳at\cosh at}{۸a^۵}$	$\frac{۱}{(s^۲-a^۲)^۳}$
$\frac{at^۲\cosh at-t\sinh at}{۸a^۳}$	$\frac{s}{(s^۲-a^۲)^۳}$
$\frac{at\cosh at+(a^۲t^۲-۱)\sinh at}{۸a^۳}$	$\frac{s^۲}{(s^۲-a^۲)^۳}$
$\frac{e^{at/۲}}{۳a^۲}\left\{\sqrt{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}at}{۲}-\cos\frac{\sqrt{۳}at}{۲}+e^{-۳at/۲}\right\}$	$\frac{۱}{s^۳+a^۳}$
$\frac{e^{at/۲}}{۳a}\left\{\cos\frac{\sqrt{۳}at}{۲}+\sqrt{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}at}{۲}-e^{-۳at/۲}\right\}$	$\frac{s}{s^۳+a^۳}$
$\frac{e^{-at/۲}}{۳a^۲}\left\{e^{۳at/۲}-\cos\frac{\sqrt{۳}at}{۲}-\sqrt{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}at}{۲}\right\}$	$\frac{۱}{s^۳-a^۳}$
$\frac{e^{-at/۲}}{۳a}\left\{\sqrt{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}at}{۲}-\cos\frac{\sqrt{۳}at}{۲}+e^{۳at/۲}\right\}$	$\frac{s}{s^۳-a^۳}$
$\frac{۱}{۴a^۳}(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at)$	$\frac{۱}{s^۴+۴a^۴}$
$\frac{\sin at\sinh at}{۲a^۲}$	$\frac{s}{s^۴+۴a^۴}$
$\frac{۱}{۲a^۲}(\cosh at-\cos at)$	$\frac{s}{s^۴-a^۴}$

فهرست راهنما

پیوست

ـتگرالهای نامعین

۱ $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

۲ $\int \cos u\, du = \sin u + C$

۳ $\int \tan u\, du = \ln \sec u = -\ln \cos u + C$

۴ $\int \cot u\, du = \ln \sin u + C$

۵ $\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u) = \ln \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$

۶ $\int \csc u\, du = \ln(\csc u - \cot u) = \ln \tan\frac{u}{2} + C$

۷ $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

۸ $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

۹ $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

۱۰ $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

۱۱ $\int \sin^2 u\, du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u) + C$

۱۲ $\int \cos^2 u\, du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) + C$

۱۳ $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

۱۴ $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

۱۵ $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$

۱۶ $\int \cosh u\, du = \sinh u + C$

۱۷ $\int \tanh u\, du = \ln \cosh u + C$

۱۸ $\int \coth u\, du = \ln \sinh u + C$

۱۹ $\int \operatorname{sech} u\, du = \sin^{-1}(\tanh u) + C$ یا $2\tan^{-1} e^u$

۲۰ $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln \tanh\frac{u}{2} + C$ یا $-\coth^{-1} e^u$

۲۱ $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

۲۲ $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

۲۳ $\int \tanh^2 u\, du = u - \tanh u + C$

۲۴ $\int \coth^2 u\, du = u - \coth u + C$

۲۵ $\int \sinh^2 u\, du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\sinh u \cosh u - u) + C$

۲۶ $\int \cosh^2 u\, du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\sinh u \cosh u + u) + C$

۲۷ $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

۲۸ $\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

۲۹ $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

۳۰ $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} \quad u^2 > a^2$

۳۱ $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C \quad u^2 < a^2$

۳۲ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a}$

۳۳ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$ یا $\sinh^{-1}\frac{u}{a}$

۳۴ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$

۳۵ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

۳۶ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$

۳۷ $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right) + C$

۳۸ $\int f^{(n)} g\, dx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \cdots (-1)^n \int f g^{(n)}\, dx + C$

فرمول کلی انتگرال به روش جزء به جزء

فرمول‌های مهم جانشینی کردن

۳۹ $\int F(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int F(u)\, du + C \qquad u = ax+b$

۴۰ $\int F(\sqrt{ax+b})\, dx = \frac{2}{a}\int u F(u)\, du + C \qquad u = \sqrt{ax+b}$

۴۱ $\int F(\sqrt[n]{ax+b})\, dx = \frac{n}{a}\int u^{n-1} F(u)\, du + C \qquad u = \sqrt[n]{ax+b}$

۴۲ $\int F(\sqrt{a^2-x^2})\, dx = a\int F(a\cos u)\cos u\, du + C \qquad x = a\sin u$

۴۳ $\int F(\sqrt{x^2+a^2})\, dx = a\int F(a\sec u)\sec^2 u\, du + C \qquad x = a\tan u$

۴۴ $\int F(\sqrt{x^2-a^2})\, dx = a\int F(a\tan u)\sec u\tan u\, du + C \qquad x = a\sec u$

۴۵ $\int F(e^{ax})\, dx = \frac{1}{a}\int \frac{F(u)}{u}\, du + C \qquad u = e^{ax}$

۴۶ $\int F(\ln x)\, dx = \int F(u)\, e^u\, du + C \qquad u = \ln x$

۴۷ $\int F\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) dx = a\int F(u)\cos u\, du + C \qquad u = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

۴۸ $\int F(\sin x, \cos x)\, dx = 2\int F\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2} + C \qquad u = \tan\frac{x}{2}$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت $ax+b$ دارند

۴۹ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$

۵۰ $\int \frac{x\, dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b) + C$

۵۱ $\int \frac{x^2\, dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b) + C$

۵۲ $\int \frac{x^3\, dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(ax+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(ax+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4}\ln(ax+b) + C$

۵۳ $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

۵۴ $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right) + C$

۵۵ $\int \frac{dx}{x^3(ax+b)} = \frac{2ax-b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

۵۶ $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)} + C$

۵۷ $\int \frac{x\, dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b) + C$

۵۸ $\int \frac{x^2\, dx}{(ax+b)^2} = \frac{ax+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(ax+b) + C$

۵۹ $\int \frac{x^3\, dx}{(ax+b)^2} = \frac{(ax+b)^2}{2a^4} - \frac{3b(ax+b)}{a^4} + \frac{b^3}{a^4(ax+b)} + \frac{3b^2}{a^4}\ln(ax+b) + C$

۶۰ $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

۶۱ $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} \quad \frac{-a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right) + C$

۶۲ $\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} = -\frac{(ax+b)^2}{2b^4x^2} + \frac{3a(ax+b)}{b^4x} - \frac{a^3x}{b^4(ax+b)} - \frac{3a^2}{b^4}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right) + C$

۶۳ $\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{2(ax+b)^2} + C$

۶۴ $\int \frac{x\, dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2} + C$

۶۵ $\int \frac{x^2\, dx}{(ax+b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} + \frac{1}{a^3}\ln(ax \pm b) + C$

۶۶ $\int \frac{x^3\, dx}{(ax+b)^3} = \frac{x}{a^3} - \frac{3b^2}{a^4(ax+b)} + \frac{b^3}{2a^4(ax+b)^2} - \frac{3b}{a^4}\ln(ax+b) + C$

۶۷ $\int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = \frac{a^2x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right) + C$

۶۸ $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3} = \frac{-a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3x} + \frac{3a}{b^4}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

۶۹ $\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3} = \frac{a^4x^2}{2b^5(ax+b)^2} - \frac{4a^3x}{b^5(ax+b)} - \frac{(ax+b)^2}{2b^5x^2} - \frac{6a^2}{b^5}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

۷۰ $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C \qquad n \neq -1,$

۷۱ $\int x(ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C, n \neq -1, -2$

۷۲ $$\int x^2(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$$

If $n = -1, -2, -3$, see 14.61, 14.68, 14.75.

۷۳ $$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \dfrac{nb}{m+n+1}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n-1}\,dx + C \\[2ex] \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \dfrac{mb}{(m+n+1)a}\displaystyle\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx + C \\[2ex] \dfrac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \dfrac{m+n+2}{(n+1)b}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n+1}\,dx + C \end{cases}$$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{ax+b}$ دارند.

۷۴ $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$$

۷۵ $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C$$

۷۶ $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b} + C$$

۷۷ $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right) + C \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} + C \end{cases}$$

۷۸ $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

۷۹ $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + C$$

۸۰ $$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3} + C$$

۸۱ $$\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)}{105a^3}\sqrt{(ax+b)^3} + C$$

۸۲ $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$ [See 14.87]

۸۳ $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$ [See 14.87]

۸۴ $$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx + C$$

۸۵ $$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}} + C$$

۸۶ $$\int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2x^m}{(2m+3)a}(ax+b)^{3/2} - \frac{2mb}{(2m+3)a}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\,dx + C$$

۸۷ $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}} + C$$

۸۸ $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m}\,dx = \frac{-(ax+b)^{3/2}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b}\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}}\,dx + C$$

۸۹ $$\int (ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)} + C$$

۹۰ $$\int x(ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)} + C$$

۹۱ $$\int x^2(ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)} - \frac{4b(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)} + \frac{2b^2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)} + C$$

۹۲ $$\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x}\,dx = \frac{2(ax+b)^{m/2}}{m} + b\int \frac{(ax+b)^{(m-2)/2}}{x}\,dx + C$$

۹۳ $$\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(ax+b)^{(m+2)/2}}{bx} + \frac{ma}{2b}\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x}\,dx + C$$

۹۴ $$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{m/2}} = \frac{2}{(m-2)b(ax+b)^{(m-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{(m-2)/2}} + C$$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت $ax+b$ و $px+q$ دارند.

۹۵ $$\int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right) + C$$

۹۶ $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{q}{p}\ln(px+q)\right\} + C$$

۹۷ $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)\right\} + C$$

۹۸ $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{q}{bp-aq}\ln\left(\frac{ax+b}{px+q}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\right\} + C$$

۹۹ $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2}\left\{\frac{q^2}{p}\ln(px+q) + \frac{b(bp-2aq)}{a^2}\ln(ax+b)\right\} + C$$

۱۰۰ $$\int \sqrt{(ax+b)(px+q)}\,dx = \frac{2apx+bp+aq}{4ap}\sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} + C$$

۱۰۱ $$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} + C$$

۱۰۲ $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(aq-bp)\sqrt{px+q}} + C$$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت x^2+a^2 دارند

۱۰۳ $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۰۴ $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

۱۰۵ $$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+a^2} = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۰۶ $$\int \frac{x^3\,dx}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

۱۰۷ $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + C$$

۱۰۸ $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۰۹ $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + C$$

۱۱۰ $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۱۱ $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2+a^2)} + C$$

۱۱۲ $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۱۳ $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

۱۱۴ $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + C$$

۱۱۵ $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۱۶ $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + C$$

۱۱۷ $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + C$$

۱۱۸ $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C$$

۱۱۹ $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{n-1}} + C$$

۱۲۰ $$\int \frac{x^m\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a^2)^n} + C$$

۱۲۱ $$\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2+a^2)^n} + C$$

۱۲۲ $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2)\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}}\right\} + C$$

۱۲۳ $$\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ln(px+q) + C$$

۱۲۴ $$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + (n-m-2)a\displaystyle\int \dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}\,dx\right\} + C \\ \dfrac{-1}{(n-m-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq)\displaystyle\int \dfrac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n}\,dx\right\} + C \\ \dfrac{-1}{(n-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma\displaystyle\int \dfrac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}}\,dx\right\} + C \end{cases}$$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{ax+b}$ و $px+q$ دارند.

۱۲۵ $$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(apx+3aq-2bp)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C$$

۱۲۶ $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{bp-aq}\,\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) + C \\ \dfrac{2}{\sqrt{aq-bp}\,\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} + C \end{cases}$$

۱۲۷ $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \dfrac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) + C. \\ \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \dfrac{2\sqrt{aq-bp}}{p\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} + C \end{cases}$$

۱۲۸ $\int (px+q)^n \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(px+q)^{n+1}\sqrt{ax+b}}{(2n+3)p} + \frac{bp-aq}{(2n+3)p}\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx$

۱۲۹ $\int \frac{dx}{(px+q)^n\sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)(aq-bp)(px+q)^{n-1}}$

$+ \frac{(2n-3)a}{2(n-1)(aq-bp)}\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}} + C$

۱۳۰ $\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(px+q)^n\sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a}\int \frac{(px+q)^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax+b}} + C$

۱۳۱ $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n}\,dx = \frac{-\sqrt{ax+b}}{(n-1)p(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)p}\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}} + C$

انتگرالهای نامتعارف انتگرالهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{px+q}$ و $\sqrt{ax+b}$ دارند.

۱۳۲ $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{ap}}\ln\left(\sqrt{a(px+q)}+\sqrt{p(ax+b)}\right) + C \\ \frac{2}{\sqrt{-ap}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} + C \end{cases}$

۱۳۳ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp+aq}{2ap}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} + C$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت x^2-a^2 و ($x^2>a^2$) دارند.

۱۳۴ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$ یا $-\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$

۱۳۵ $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) + C$

۱۳۶ $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-a^2} = x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۳۷ $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-a^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x^2-a^2) + C$

۱۳۸ $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right) + C$

۱۳۹ $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۴۰ $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right) + C$

۱۴۱ $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۴۲ $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2-a^2)} + C$

۱۴۳ $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۴۴ $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) + C$

۱۴۵ $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right) + C$

۱۴۶ $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2-a^2)} - \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

۱۴۷ $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2-a^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right) + C$

۱۴۸ $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + C$

۱۴۹ $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} + C$

۱۵۰ $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{n-1}} + C$

۱۵۱ $\int \frac{x^m\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + a^2\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-a^2)^n} + C$

۱۵۲ $\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^{n-1}} + C$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت a^2-x^2 و $(x^2<a^2)$ دارند.

۱۵۳ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$ یا $\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$

۱۵۴ $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2) + C$

۱۵۵ $\int \frac{x^2\,dx}{a^2-x^2} = -x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$

۱۵۶ $\int \frac{x^3\,dx}{a^2-x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(a^2-x^2) + C$

۱۵۷ $$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

۱۵۸ $$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

۱۵۹ $$\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

۱۶۰ $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

۱۶۱ $$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2-x^2)} + C$$

۱۶۲ $$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

۱۶۳ $$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}\ln(a^2-x^2) + C$$

۱۶۴ $$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

۱۶۵ $$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

۱۶۶ $$\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C$$

۱۶۷ $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

۱۶۸ $$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

۱۶۹ $$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

۱۷۰ $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2-x^2)^n} = a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

۱۷۱ $$\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2-x^2)^n} + C$$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{x^2+a^2}$ دارند.

۱۷۲ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C \text{ یا } \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

۱۷۳ $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$$

۱۷۴ $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۷۵ $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2} + C$$

۱۷۶ $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

۱۷۷ $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$$

۱۷۸ $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

۱۷۹ $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۸۰ $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + C$$

۱۸۱ $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۸۲ $$\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + C$$

۱۸۳ $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

۱۸۴ $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۸۵ $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

۱۸۶ $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

۱۸۷ $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

۱۸۸ $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۸۹ $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

۱۹۰ $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

۱۹۱ $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

۱۹۲ $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

۱۹۳ $$\int (x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۹۴ $$\int x(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} + C$$

۱۹۵ $$\int x^2(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2x(x^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۹۶ $$\int x^3(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{5/2}}{5} + C$$

۱۹۷ $$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

۱۹۸ $$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

۱۹۹ $$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد.

۲۰۰ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}), \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C$$

۲۰۱ $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

۲۰۲ $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2-a^2} + C$$

۲۰۳ $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۰۴ $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$$

۲۰۵ $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۰۶ $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

۲۰۷ $$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + C$$

۲۰۸ $$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

۲۰۹ $$\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + C$$

۲۱۰ $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۱۱ $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

۲۱۲ $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۱۳ $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

۲۱۴ $$\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

۲۱۵ $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

۲۱۶ $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

۲۱۷ $$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۱۸ $$\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

۲۱۹ $$\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۲۰ $$\int (x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

۲۲۱ $$\int x(x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + C$$

۲۲۲ $$\int x^2(x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(x^2-a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2-a^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

۲۲۳ $$\int x^3(x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + C$$

۲۲۴ $$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

۲۲۵ $$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

۲۲۶ $$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

انتگرالهایی که جملاتی به صورت $\sqrt{a^2-x^2}$ دارند

۲۲۷ $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۲۸ $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$$

۲۲۹ $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۳۰ $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2} + C$$

۲۳۱ $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۳۲ $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$$

۲۳۳ $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۳۴ $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۳۵ $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + C$$

۲۳۶ $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۳۷ $$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + C$$

۲۳۸ $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۳۹ $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۴۰ $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۴۱ $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

۲۴۲ $$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

۲۴۳ $$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۴۴ $$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

۲۴۵ $$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۴۶ $$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4x} + \frac{x}{a^4\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

۲۴۷ $$\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۴۸ $$\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۴۹ $$\int x(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} + C$$

۲۵۰ $$\int x^2(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(a^2-x^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{a^2-x^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۵۱ $$\int x^3(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{5/2}}{5} + C$$

۲۵۲ $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۲۵۳ $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} - \frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۵۴ $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع $\sqrt{ax^2+bx+c}$ باشد.

۲۵۵ $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + 2ax + b\right) + C \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \end{cases}$$

یا $$\frac{1}{\sqrt{a}} \sinh^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$$

۲۵۶ $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۵۷ $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۵۸ $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c} + bx + 2c}{x}\right) + C \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) \end{cases}$$

یا $$-\frac{1}{\sqrt{c}} \sinh^{-1}\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$$

۲۵۹ $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۰ $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۱ $$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۲ $$\int x^2\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{6ax-5b}{24a^2}(ax^2+bx+c)^{3/2} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx + C$$

۲۶۳ $$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}\,dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۴ $$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۵ $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۶ $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(bx+2c)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۷ $$\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۶۸ $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{c\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} + C$$

۲۶۹ $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{ax^2+2bx+c}{c^2x\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} - \frac{3b}{2c^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} + C$$

۲۷۰ $$\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8a(n+1)}\int (ax^2+bx+c)^{n-1/2}\,dx + C$$

۲۷۱ $$\int x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}}{a(2n+3)} - \frac{b}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx + C$$

۲۷۲ $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + C$$

۲۷۳ $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{1}{(2n-1)c(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع sin ax باشد.

۲۷۴ $$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

۲۷۵ $$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} + C$$

۲۷۶ $$\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos ax + C$$

۲۷۷ $$\int x^3 \sin ax\, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax + \left(\frac{6x}{a^3} - \frac{x^3}{a}\right)\cos ax + C$$

۲۷۸ $$\int \frac{\sin ax}{x}\, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \cdots + C$$

۲۷۹ $$\int \frac{\sin ax}{x^2}\, dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax}{x}\, dx + C$$

۲۸۰ $$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2} + C$$

۲۸۱ $$\int \frac{x\, dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\} + C$$

۲۸۲ $$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

۲۸۳ $$\int x\sin^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} + C$$

۲۸۴ $$\int \sin^3 ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a} + C$$

۲۸۵ $$\int \sin^4 ax\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a} + C$$

۲۸۶ $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax + C$$

۲۸۷ $$\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\tan\frac{ax}{2} + C$$

۲۸۸ $$\int \sin px\sin qx\, dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + C \quad [\text{If } p \neq \pm q,$$

۲۸۹ $$\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

۲۹۰ $$\int \frac{x\, dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$$

۲۹۱ $$\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$$

۲۹۲ $$\int \frac{x\, dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

۲۹۳ $$\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

۲۹۴ $$\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$$

۲۹۵ $$\int \frac{dx}{p+q\sin ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{p\tan\frac{1}{2}ax + q}{\sqrt{p^2-q^2}} + C \\ \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{p\tan\frac{1}{2}ax + q - \sqrt{q^2-p^2}}{p\tan\frac{1}{2}ax + q + \sqrt{q^2-p^2}}\right) + C \end{cases} \quad p \neq \pm q$$

۲۹۶ $$\int \frac{dx}{(p+q\sin ax)^2} = \frac{q\cos ax}{a(p^2-q^2)(p+q\sin ax)} + \frac{p}{p^2-q^2}\int\frac{dx}{p+q\sin ax} + C \quad p \neq \pm q$$

۲۹۷ $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{p^2+q^2}\tan ax}{p} + C$$

۲۹۸ $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\sin^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}\tan ax}{p} + C \\ \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}\tan ax + p}{\sqrt{q^2-p^2}\tan ax - p}\right) + C \end{cases}$$

۲۹۹ $$\int x^m \sin ax\, dx = -\frac{x^m\cos ax}{a} + \frac{mx^{m-1}\sin ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\sin ax\, dx + C$$

۳۰۰ $$\int \frac{\sin ax}{x^n}\, dx = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}\, dx + C$$

۳۰۱ $$\int \sin^n ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\, dx + C$$

۳۰۲ $$\int \frac{dx}{\sin^n ax} = \frac{-\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2} ax} + C$$

۳۰۳ $$\int \frac{x\, dx}{\sin^n ax} = \frac{-x\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\, dx}{\sin^{n-2} ax} + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع $\cos ax$ باشد.

۳۰۴ $$\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C$$

۳۰۵ $$\int x\cos ax\, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a} + C$$

۳۰۶ $$\int x^2\cos ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax + C$$

۳۰۷ $$\int x^3\cos ax\, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax + C$$

۳۰۸ $$\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots + C$$

۳۰۹ $$\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax}{x}\,dx + C$$

۳۱۰ $$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

۳۱۱ $$\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\} + C$$

۳۱۲ $$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

۳۱۳ $$\int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2} + C$$

۳۱۴ $$\int \cos^3 ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} - \frac{\sin^3 ax}{3a} + C$$

۳۱۵ $$\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a} + C$$

۳۱۶ $$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a} + C$$

۳۱۷ $$\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

۳۱۸ $$\int \cos ax\cos px\,dx = \frac{\sin(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\sin(a+p)x}{2(a+p)} + C \qquad a \neq \pm p,$$

۳۱۹ $$\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$$

۳۲۰ $$\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\cot\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sin\frac{ax}{2} + C$$

۳۲۱ $$\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$$

۳۲۲ $$\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2} + C$$

۳۲۳ $$\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\cot\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\cot^3\frac{ax}{2} + C$$

۳۲۴ $$\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\tan^3\frac{ax}{2} + C$$

۳۲۵ $$\int \frac{dx}{p+q\cos ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\sqrt{(p-q)/(p+q)}\,\tan\tfrac{1}{2}ax + C \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{\tan\frac{1}{2}ax + \sqrt{(q+p)/(q-p)}}{\tan\frac{1}{2}ax - \sqrt{(q+p)/(q-p)}}\right) + C \end{cases} \qquad p \neq \pm q$$

۳۲۶ $$\int \frac{dx}{(p+q\cos ax)^2} = \frac{q\sin ax}{a(q^2-p^2)(p+q\cos ax)} - \frac{p}{q^2-p^2}\int \frac{dx}{p+q\cos ax} + C \qquad p \neq \pm q$$

۳۲۷ $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\tan^{-1}\frac{p\tan ax}{\sqrt{p^2+q^2}} + C$$

۳۲۸ $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{p\tan ax}{\sqrt{p^2-q^2}} + C \\[2ex] \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{p\tan ax - \sqrt{q^2-p^2}}{p\tan ax + \sqrt{q^2-p^2}}\right) + C \end{cases}$$

۳۲۹ $$\int x^m\cos ax\,dx = \frac{x^m\sin ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2}\cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos ax\,dx + C$$

۳۳۰ $$\int \frac{\cos ax}{x^n}\,dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}\,dx + C$$

۳۳۱ $$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\sin ax\cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx + C$$

۳۳۲ $$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} + C$$

۳۳۳ $$\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax} + C$$

انتگرالهایی که شامل توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ باشند.

۳۳۴ $$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^2 ax}{2a} + C$$

۳۳۵ $$\int \sin px\cos qx\,dx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} + C$$

۳۳۶ $$\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \qquad n \neq -1$$

۳۳۷ $$\int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \qquad n \neq -1$$

۳۳۸ $$\int \sin^2 ax \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} + C$$

۳۳۹ $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan ax + C$$

۳۴۰ $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a \sin ax} + C$$

۳۴۱ $$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{a \cos ax} + C$$

۳۴۲ $$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2 \cot 2ax}{a} + C$$

۳۴۳ $$\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

۳۴۴ $$\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx = \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

۳۴۵ $$\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \mp \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

۳۴۶ $$\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2} + C$$

۳۴۷ $$\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right) + C$$

۳۴۸ $$\int \frac{\sin ax \, dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax) + C$$

۳۴۹ $$\int \frac{\cos ax \, dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax) + C$$

۳۵۰ $$\int \frac{\sin ax \, dx}{p + q \cos ax} = -\frac{1}{aq} \ln (p + q \cos ax) + C$$

۳۵۱ $$\int \frac{\cos ax \, dx}{p + q \sin ax} = \frac{1}{aq} \ln (p + q \sin ax) + C$$

۳۵۲ $$\int \frac{\sin ax \, dx}{(p + q \cos ax)^n} = \frac{1}{aq(n-1)(p + q \cos ax)^{n-1}} + C$$

۳۵۳ $$\int \frac{\cos ax \, dx}{(p + q \sin ax)^n} = \frac{-1}{aq(n-1)(p + q \sin ax)^{n-1}} + C$$

۳۵۴ $$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \tan \left(\frac{ax + \tan^{-1}(q/p)}{2}\right) + C$$

۳۵۵ $$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax + r}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{r^2 - p^2 - q^2}} \tan^{-1} \left(\dfrac{p + (r-q) \tan (ax/2)}{\sqrt{r^2 - p^2 - q^2}}\right) + C \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2 - r^2}} \ln \left(\dfrac{p - \sqrt{p^2 + q^2 - r^2} + (r-q) \tan (ax/2)}{p + \sqrt{p^2 + q^2 - r^2} + (r-q) \tan (ax/2)}\right) + C \end{cases}$$

۳۵۵ $$\int \frac{dx}{p \sin ax + q(1 + \cos ax)} = \frac{1}{ap} \ln \left(q + p \tan \frac{ax}{2}\right) + C$$

۳۵۶ $$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax \pm \sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{-1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax + \tan^{-1}(q/p)}{2}\right) + C$$

۳۵۷ $$\int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax + q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{apq} \tan^{-1} \left(\frac{p \tan ax}{q}\right) + C$$

۳۵۸ $$\int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax - q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{2apq} \ln \left(\frac{p \tan ax - q}{p \tan ax + q}\right) + C$$

۳۵۹ $$\int \sin^m ax \cos^n ax \, dx$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\sin^{m-1} ax \cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{m-1}{m+n} \displaystyle\int \sin^{m-2} ax \cos^n ax \, dx + C \\[2ex] \dfrac{\sin^{m+1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{n-1}{m+n} \displaystyle\int \sin^m ax \cos^{n-2} ax \, dx + C \end{cases}$$

۳۶۰ $$\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax} dx = \begin{cases} \dfrac{\sin^{m-1} ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1} \displaystyle\int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^{n-2} ax} dx + C \\[2ex] \dfrac{\sin^{m+1} ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1} \displaystyle\int \frac{\sin^m ax}{\cos^{n-2} ax} dx + C \\[2ex] \dfrac{-\sin^{m-1} ax}{a(m-n) \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n} \displaystyle\int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^n ax} dx + C \end{cases}$$

۳۶۱ $$\int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax} dx = \begin{cases} \dfrac{-\cos^{m-1} ax}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1} \displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^{n-2} ax} dx + C \\[2ex] \dfrac{-\cos^{m+1} ax}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1} \displaystyle\int \frac{\cos^m ax}{\sin^{n-2} ax} dx + C \\[2ex] \dfrac{\cos^{m-1} ax}{a(m-n) \sin^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n} \displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^n ax} dx + C \end{cases}$$

۳۶۲ $$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{a(n-1) \sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{n-1} \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^{n-2} ax} + C \\[2ex] \dfrac{-1}{a(m-1) \sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{m-1} \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^{m-2} ax \cos^n ax} + C \end{cases}$$

انتگرالهایی که شامل تابع tanax باشد

۳۶۳ $$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax = \frac{1}{a}\ln\sec ax + C$$

۳۶۴ $$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} - x + C$$

۳۶۵ $$\int \tan^3 ax\,dx = \frac{\tan^2 ax}{2a} + \frac{1}{a}\ln\cos ax + C$$

۳۶۶ $$\int \tan^n ax\sec^2 ax\,dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{(n+1)a} + C$$

۳۶۷ $$\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln\tan ax + C$$

۳۶۸ $$\int \frac{dx}{\tan ax} = \frac{1}{a}\ln\sin ax + C$$

۳۶۹ $$\int x\tan ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^3}{3} + \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\} + C$$

۳۷۰ $$\int \frac{\tan ax}{x}\,dx = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots + C$$

۳۷۱ $$\int x\tan^2 ax\,dx = \frac{x\tan ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax - \frac{x^2}{2} + C$$

۳۷۲ $$\int \frac{dx}{p+q\tan ax} = \frac{px}{p^2+q^2} + \frac{q}{a(p^2+q^2)}\ln(q\sin ax + p\cos ax) + C$$

۳۷۳ $$\int \tan^n ax\,dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع cot ax باشد

۳۷۴ $$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax + C$$

۳۷۵ $$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{\cot ax}{a} - x + C$$

۳۷۶ $$\int \cot^3 ax\,dx = -\frac{\cot^2 ax}{2a} - \frac{1}{a}\ln\sin ax + C$$

۳۷۷ $$\int \cot^n ax\csc^2 ax\,dx = -\frac{\cot^{n+1} ax}{(n+1)a} + C$$

۳۷۸ $$\int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cot ax + C$$

۳۷۹ $$\int \frac{dx}{\cot ax} = -\frac{1}{a}\ln\cos ax + C$$

۳۸۰ $$\int x\cot ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cdots\right\} + C$$

۳۸۱ $$\int \frac{\cot ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \cdots + C$$

۳۸۲ $$\int x\cot^2 ax\,dx = -\frac{x\cot ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\sin ax - \frac{x^2}{2} + C$$

۳۸۳ $$\int \frac{dx}{p+q\cot ax} = \frac{px}{p^2+q^2} - \frac{q}{a(p^2+q^2)}\ln(p\sin ax + q\cos ax) + C$$

۳۸۴ $$\int \cot^n ax\,dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی‌که شامل تابع secax باشد

۳۸۵ $$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

۳۸۶ $$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + C$$

۳۸۷ $$\int \sec^3 ax\,dx = \frac{\sec ax\tan ax}{2a} + \frac{1}{2a}\ln(\sec ax + \tan ax) + C$$

۳۸۸ $$\int \sec^n ax\tan ax\,dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C$$

۳۸۹ $$\int \frac{dx}{\sec ax} = \frac{\sin ax}{a} + C$$

۳۹۰ $$\int x\sec ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\} + C$$

۳۹۱ $$\int \frac{\sec ax}{x}\,dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} + \frac{61(ax)^6}{4320} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots + C$$

۳۹۲ $$\int x\sec^2 ax\,dx = \frac{x}{a}\tan ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax + C$$

۳۹۳ $$\int \frac{dx}{q+p\sec ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p+q\cos ax} + C$$

۳۹۴ $$\int \sec^n ax\,dx = \frac{\sec^{n-2} ax\tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع csc ax باشد.

۳۹۵ $$\int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2} + C$$

۳۹۶ $$\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{\cot ax}{a} + C$$

۳۹۷ $$\int \csc^3 ax\,dx = -\frac{\csc ax\cot ax}{2a} + \frac{1}{2a}\ln\tan\frac{ax}{2} + C$$

۳۹۸ $$\int \csc^n ax\cot ax\,dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C$$

۳۹۹ $$\int \frac{dx}{\csc ax} = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

۴۰۰ $$\int x\csc ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\} + C$$

۴۰۱ $$\int \frac{\csc ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots + C$$

۴۰۲ $$\int x\csc^2 ax\,dx = -\frac{x\cot ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\sin ax + C$$

۴۰۳ $$\int \frac{dx}{q+p\csc ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p+q\sin ax} + C$$

۴۰۴ $$\int \csc^n ax\,dx = -\frac{\csc^{n-2} ax\cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل توابع معکوس مثلثاتی باشند

۴۰۵ $$\int \sin^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\sin^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$$

۴۰۶ $$\int x\sin^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4} + C$$

۴۰۷ $$\int x^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9} + C$$

۴۰۸ $$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2\cdot3\cdot3} + \frac{1\cdot3(x/a)^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5(x/a)^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7} + \cdots + C$$

۴۰۹ $$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۴۱۰ $$\int \left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2-x^2}\,\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۴۱۱ $$\int \cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\cos^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$$

۴۱۲ $$\int x\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4} + C$$

۴۱۳ $$\int x^2\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9} + C$$

۴۱۴ $$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x}\,dx + C$$

۴۱۵ $$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

۴۱۶ $$\int \left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2-x^2}\,\cos^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۴۱۷ $$\int \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

۴۱۸ $$\int x\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+a^2)\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C$$

۴۱۹ $$\int x^2\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2) + C$$

۴۲۰ $$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} - \frac{(x/a)^7}{7^2} + \cdots + C$$

۴۲۱ $$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right) + C$$

۴۲۲ $$\int \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

۴۲۳ $$\int x\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+a^2)\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C$$

۴۲۴ $$\int x^2 \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2) + C$$

۴۲۵ $$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx + C$$

۴۲۶ $$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right) + C$$

۴۲۷ $$\int \sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\sec^{-1}\frac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x\sec^{-1}\frac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

۴۲۸ $$\int x\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\sec^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}\sec^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

۴۲۹ $$\int x^2\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{x^3}{3}\sec^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3}\sec^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

۴۳۰ $$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x + \frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots + C$$

۴۳۱ $$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

۴۳۲ $$\int \csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\csc^{-1}\frac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x\csc^{-1}\frac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

۴۳۳ $$\int x\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\csc^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}\csc^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

۴۳۴ $$\int x^2\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{x^3}{3}\csc^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3}\csc^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

۴۳۵ $$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}\right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots\right) + C$$

۴۳۶ $$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

۴۳۷ $$\int x^m\sin^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + C$$

۴۳۸ $$\int x^m\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cos^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + C$$

۴۳۹ $$\int x^m\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx + C$$

۴۴۰ $$\int x^m\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx + C$$

۴۴۱ $$\int x^m\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

۴۴۲ $$\int x^m\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{x^{m+1}\csc^{-1}(x/a)}{m+1} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^{m+1}\csc^{-1}(x/a)}{m+1} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + C & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

انتگرالهایی که شامل تابع e^{ax} باشد

۴۴۳ $$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

۴۴۴ $$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$$

۴۴۵ $$\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C$$

۴۴۶ $$\int x^ne^{ax}\,dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \cdots \frac{(-1)^n n!}{a^n}\right) + C$$
اگر n عدد صحیح مثبت باشد.

۴۴۷ $$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots + C$$

۴۴۸ $$\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx + C$$

۴۴۹ $$\int \frac{dx}{p+qe^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\ln(p+qe^{ax}) + C$$

۴۵۰ $$\int \frac{dx}{(p+qe^{ax})^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{ap(p+qe^{ax})} - \frac{1}{ap^2}\ln(p+qe^{ax}) + C$$

۴۵۱ $$\int \frac{dx}{pe^{ax}+qe^{-ax}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{pq}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{p}{q}}\,e^{ax}\right) + C \\ \dfrac{1}{2a\sqrt{-pq}}\ln\left(\dfrac{e^{ax}-\sqrt{-q/p}}{e^{ax}+\sqrt{-q/p}}\right) + C \end{cases}$$

۴۵۲ $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$

۴۵۳ $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C$$

۴۵۴ $$\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$
$$- \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx\}}{(a^2+b^2)^2} + C$$

۴۵۵ $$\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$
$$- \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx\}}{(a^2+b^2)^2} + C$$

۴۵۶ $$\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx + C$$

۴۵۷ $$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}(a\sin bx - nb\cos bx)$$
$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx + C$$

۴۵۸ $$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}(a\cos bx + nb\sin bx)$$
$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع $\ln x$ باشد

۴۵۹ $$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

۴۶۰ $$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right) + C$$

۴۶۱ $$\int x^m\ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right) + C \qquad m \neq -1$$

۴۶۲ $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

۴۶۳ $$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

۴۶۴ $$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

۴۶۵ $$\int \frac{\ln^n x\,dx}{x} = \frac{\ln^{n+1}x}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

۴۶۶ $$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C$$

۴۶۷ $$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2\cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3\cdot 3!} + \cdots + C$$

۴۶۸ $$\int \frac{x^m\,dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + (m+1)\ln x + \frac{(m+1)^2\ln^2 x}{2\cdot 2!}$$
$$+ \frac{(m+1)^3\ln^3 x}{3\cdot 3!} + \cdots + C$$

۴۶۹ $$\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx + C$$

۴۷۰ $$\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,dx + C$$ اگر $m \neq -1$

۴۷۱ $$\int \ln(x^2+a^2)\,dx = x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۴۷۲ $$\int \ln(x^2-a^2)\,dx = x\ln(x^2-a^2) - 2x + a\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + C$$

۴۷۳ $$\int x^m \ln(x^2\pm a^2)\,dx = \frac{x^{m+1}\ln(x^2\pm a^2)}{m+1} - \frac{2}{m+1}\int \frac{x^{m+2}}{x^2\pm a^2}\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع sinh ax باشد

۴۷۴ $$\int \sinh ax\,dx = \frac{\cosh ax}{a} + C$$

۴۷۵ $$\int x\sinh ax\,dx = \frac{x\cosh ax}{a} - \frac{\sinh ax}{a^2} + C$$

۴۷۶ $$\int x^2\sinh ax\,dx = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right)\cosh ax - \frac{2x}{a^2}\sinh ax + C$$

۴۷۷ $$\int \frac{\sinh ax}{x}\,dx = ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} + \cdots + C$$

۴۷۸ $$\int \frac{\sinh ax}{x^2}\,dx = -\frac{\sinh ax}{x} + a\int \frac{\cosh ax}{x}\,dx + C$$

۴۷۹ $$\int \frac{dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a}\ln\tanh\frac{ax}{2} + C$$

۴۸۰ $$\int \frac{x\,dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} - \cdots + \frac{2(-1)^n(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\} + C$$

۴۸۱ $$\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{\sinh ax\cosh ax}{2a} - \frac{x}{2} + C$$

۴۸۲ $$\int x\sinh^2 ax\,dx = \frac{x\sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} - \frac{x^2}{4} + C$$

۴۸۳ $$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\coth ax}{a} + C$$

۴۸۴ $$\int \sinh ax\sinh px\,dx = \frac{\sinh(a+p)x}{2(a+p)} - \frac{\sinh(a-p)x}{2(a-p)} + C \qquad a \neq \pm p$$

۴۸۵ $$\int \sinh ax\sin px\,dx = \frac{a\cosh ax\sin px - p\sinh ax\cos px}{a^2+p^2} + C$$

۴۸۶ $$\int \sinh ax\cos px\,dx = \frac{a\cosh ax\cos px + p\sinh ax\sin px}{a^2+p^2} + C$$

۴۸۷ $$\int \frac{dx}{p+q\sinh ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\ln\left(\frac{qe^{ax}+p-\sqrt{p^2+q^2}}{qe^{ax}+p+\sqrt{p^2+q^2}}\right) + C$$

۴۸۸ $$\int \frac{dx}{(p+q\sinh ax)^2} = \frac{-q\cosh ax}{a(p^2+q^2)(p+q\sinh ax)} + \frac{p}{p^2+q^2}\int \frac{dx}{p+q\sinh ax} + C$$

۴۸۹ $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\sinh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{q^2-p^2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}\tanh ax}{p} + C \\ \dfrac{1}{2ap\sqrt{p^2-q^2}}\ln\left(\dfrac{p+\sqrt{p^2-q^2}\tanh ax}{p-\sqrt{p^2-q^2}\tanh ax}\right) + C \end{cases}$$

۴۹۰ $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\sinh^2 ax} = \frac{1}{2ap\sqrt{p^2+q^2}}\ln\left(\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}\tanh ax}{p-\sqrt{p^2+q^2}\tanh ax}\right) + C$$

۴۹۱ $$\int x^m\sinh ax\,dx = \frac{x^m\cosh ax}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\cosh ax\,dx + C$$

۴۹۲ $$\int \sinh^n ax\,dx = \frac{\sinh^{n-1} ax\cosh ax}{an} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\,dx + C$$

۴۹۳ $$\int \frac{\sinh ax}{x^n}\,dx = \frac{-\sinh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cosh ax}{x^{n-1}}\,dx + C$$

۴۹۴ $$\int \frac{dx}{\sinh^n ax} = \frac{-\cosh ax}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sinh^{n-2} ax} + C$$

۴۹۵ $$\int \frac{x\,dx}{\sinh^n ax} = \frac{-x\cosh ax}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\sinh^{n-2} ax} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sinh^{n-2} ax} + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع cosh ax باشد

۴۹۶ $$\int \cosh ax\,dx = \frac{\sinh ax}{a} + C$$

۴۹۷ $$\int x\cosh ax\,dx = \frac{x\sinh ax}{a} - \frac{\cosh ax}{a^2} + C$$

۴۹۸ $$\int x^2\cosh ax\,dx = -\frac{2x\cosh ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a}+\frac{2}{a^3}\right)\sinh ax + C$$

۴۹۹ $$\int \frac{\cosh ax}{x}\,dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots + C$$

۵۰۰ $$\int \frac{\cosh ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cosh ax}{x} + a\int\frac{\sinh ax}{x}\,dx + C$$

۵۰۱ $$\int \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{2}{a}\tan^{-1} e^{ax} + C$$

۵۰۲ $$\int \frac{x\,dx}{\cosh ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\} + C$$

۵۰۳ $$\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh ax\cosh ax}{2a} + C$$

۵۰۴ $$\int x\cosh^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} + C$$

۵۰۵ $$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\tanh ax}{a} + C$$

۵۰۶ $$\int \cosh ax\cosh px\,dx = \frac{\sinh(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\sinh(a+p)x}{2(a+p)} + C$$

۵۰۷ $$\int \cosh ax\sin px\,dx = \frac{a\sinh ax\sin px - p\cosh ax\cos px}{a^2+p^2} + C$$

۵۰۸ $$\int \cosh ax\cos px\,dx = \frac{a\sinh ax\cos px + p\cosh ax\sin px}{a^2+p^2} + C$$

۵۰۹ $$\int \frac{dx}{\cosh ax + 1} = \frac{1}{a}\tanh\frac{ax}{2} + C$$

۵۱۰ $$\int \frac{dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{1}{a}\coth\frac{ax}{2} + C$$

۵۱۱ $$\int \frac{x\,dx}{\cosh ax + 1} = \frac{x}{a}\tanh\frac{ax}{2} - \frac{2}{a^2}\ln\cosh\frac{ax}{2} + C$$

۵۱۲ $$\int \frac{x\,dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{x}{a}\coth\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sinh\frac{ax}{2} + C$$

۵۱۳ $$\int \frac{dx}{(\cosh ax + 1)^2} = \frac{1}{2a}\tanh\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\tanh^3\frac{ax}{2} + C$$

۵۱۴ $$\int \frac{dx}{(\cosh ax - 1)^2} = \frac{1}{2a}\coth\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\coth^3\frac{ax}{2} + C$$

۵۱۵ $$\int \frac{dx}{p+q\cosh ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{q^2-p^2}}\tan^{-1}\dfrac{qe^{ax}+p}{\sqrt{q^2-p^2}} + C \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{p^2-q^2}}\ln\left(\dfrac{qe^{ax}+p-\sqrt{p^2-q^2}}{qe^{ax}+p+\sqrt{p^2-q^2}}\right) + C \end{cases}$$

۵۱۶ $$\int \frac{dx}{(p+q\cosh ax)^2} = \frac{q\sinh ax}{a(q^2-p^2)(p+q\cosh ax)} - \frac{p}{q^2-p^2}\int\frac{dx}{p+q\cosh ax} + C$$

۵۱۷ $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\cosh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{2ap\sqrt{p^2-q^2}}\ln\left(\dfrac{p\tanh ax+\sqrt{p^2-q^2}}{p\tanh ax-\sqrt{p^2-q^2}}\right) + C \\[2ex] \dfrac{-1}{ap\sqrt{q^2-p^2}}\tan^{-1}\dfrac{p\tanh ax}{\sqrt{q^2-p^2}} + C \end{cases}$$

۵۱۸ $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\cosh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{2ap\sqrt{p^2+q^2}}\ln\left(\dfrac{p\tanh ax+\sqrt{p^2+q^2}}{p\tanh ax-\sqrt{p^2+q^2}}\right) + C \\[2ex] \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\tan^{-1}\dfrac{p\tanh ax}{\sqrt{p^2+q^2}} + C \end{cases}$$

۵۱۹ $$\int x^m\cosh ax\,dx = \frac{x^m\sinh ax}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\sinh ax\,dx + C$$

۵۲۰ $$\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1}ax\sinh ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int\cosh^{n-2}ax\,dx + C$$

۵۲۱ $$\int \frac{\cosh ax}{x^n}\,dx = \frac{-\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{\sinh ax}{x^{n-1}}\,dx + C$$

۵۲۲ $$\int \frac{dx}{\cosh^n ax} = \frac{\sinh ax}{a(n-1)\cosh^{n-1}ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cosh^{n-2}ax} + C$$

۵۲۳ $$\int \frac{x\,dx}{\cosh^n ax} = \frac{x\sinh ax}{a(n-1)\cosh^{n-1}ax} + \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\cosh^{n-2}ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\,dx}{\cosh^{n-2}ax} + C$$

انتگرالهایی که جملاتی به‌صورت sinhax و coshax دارند.

۵۲۴ $$\int \sinh ax\cosh ax\,dx = \frac{\sinh^2 ax}{2a} + C$$

۵۲۵ $$\int \sinh px\cosh qx\,dx = \frac{\cosh(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\cosh(p-q)x}{2(p-q)} + C$$

۵۲۶ $$\int \sinh^n ax\cosh ax\,dx = \frac{\sinh^{n+1}ax}{(n+1)a} + C \qquad n\neq -1$$

۵۲۷ $$\int \cosh^n ax \sinh ax\, dx = \frac{\cosh^{n+1} ax}{(n+1)a} + C \qquad n \neq -1$$

۵۲۸ $$\int \sinh^2 ax \cosh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 4ax}{32a} - \frac{x}{8} + C$$

۵۲۹ $$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh ax + C$$

۵۳۰ $$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh ax} = -\frac{1}{a} \tan^{-1} \sinh ax - \frac{\operatorname{csch} ax}{a} + C$$

۵۳۱ $$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{sech} ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

۵۳۲ $$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2 \coth 2ax}{a} + C$$

۵۳۳ $$\int \frac{\sinh^2 ax}{\cosh ax}\, dx = \frac{\sinh ax}{a} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \sinh ax + C$$

۵۳ $$\int \frac{\cosh^2 ax}{\sinh ax}\, dx = \frac{\cosh ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + C$$

۵۳۵ $$\int \frac{dx}{\cosh ax\,(1 + \sinh ax)} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + \sinh ax}{\cosh ax} \right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} e^{ax} + C$$

۵۳۶ $$\int \frac{dx}{\sinh ax\,(\cosh ax + 1)} = \frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + \frac{1}{2a(\cosh ax + 1)} + C$$

۵۳۷ $$\int \frac{dx}{\sinh ax\,(\cosh ax - 1)} = -\frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} - \frac{1}{2a(\cosh ax - 1)} + C$$

انتگرالهایی‌که شامل تابع tanh ax باشد.

۵۳۸ $$\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + C$$

۵۳۹ $$\int \tanh^2 ax\, dx = x - \frac{\tanh ax}{a} + C$$

۵۴۰ $$\int \tanh^3 ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax - \frac{\tanh^2 ax}{2a} + C$$

۵۴۱ $$\int \tanh^n ax \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{\tanh^{n+1} ax}{(n+1)a} + C$$

۵۴۲ $$\int \frac{\operatorname{sech}^2 ax}{\tanh ax}\, dx = \frac{1}{a} \ln \tanh ax + C$$

۵۴۳ $$\int \frac{dx}{\tanh ax} = \frac{1}{a} \ln \sinh ax + C$$

۵۴۴ $$\int x \tanh ax\, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{3} - \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} - \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\} + C$$

۵۴۵ $$\int x \tanh^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \tanh ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cosh ax + C$$

۵۴۶ $$\int \frac{\tanh ax}{x}\, dx = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots + C$$

۵۴۷ $$\int \frac{ax}{p + q \tanh ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln (q \sinh ax + p \cosh ax) + C$$

۵۴۸ $$\int \tanh^n ax\, dx = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\, dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع coth ax باشد

۵۴۹ $$\int \coth ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \sinh ax + C$$

۵۵۰ $$\int \coth^2 ax\, dx = x - \frac{\coth ax}{a} + C$$

۵۵۱ $$\int \coth^3 ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \sinh ax - \frac{\coth^2 ax}{2a} + C$$

۵۵۲ $$\int \coth^n ax \operatorname{csch}^2 ax\, dx = -\frac{\coth^{n+1} ax}{(n+1)a} + C$$

۵۵۳ $$\int \frac{\operatorname{csch}^2 ax}{\coth ax}\, dx = -\frac{1}{a} \ln \coth ax + C$$

۵۵۴ $$\int \frac{dx}{\coth ax} = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + C$$

۵۵۵ $$\int x \coth ax\, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\} + C$$

۵۵۶ $$\int x \coth^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \coth ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sinh ax + C$$

۵۵۷ $$\int \frac{\coth ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \cdots \frac{(-1)^n 2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots + C$$

۵۵۸ $$\int \frac{dx}{p + q\coth ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)}\ln(p\sinh ax + q\cosh ax) + C$$

۵۵۹ $$\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع sechax باشد

۵۶۰ $$\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{2}{a}\tan^{-1} e^{ax} + C$$

۵۶۱ $$\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{\tanh ax}{a} + C$$

۵۶۲ $$\int \operatorname{sech}^3 ax\,dx = \frac{\operatorname{sech} ax \tanh ax}{2a} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\sinh ax + C$$

۵۶۳ $$\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C$$

۵۶۴ $$\int \frac{dx}{\operatorname{sech} ax} = \frac{\sinh ax}{a} + C$$

۵۶۵ $$\int x \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\} + C$$

۵۶۶ $$\int x \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{x\tanh ax}{a} - \frac{1}{a^2}\ln\cosh ax + C$$

۵۶۷ $$\int \frac{\operatorname{sech} ax}{x}\,dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} - \frac{61(ax)^6}{4320} + \cdots \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots + C$$

۵۶۸ $$\int \frac{dx}{q + p\operatorname{sech} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p + q\cosh ax} + C$$

۵۶۹ $$\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل تابع cschax باشد

۵۷۰ $$\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\tanh\frac{ax}{2} + C$$

۵۷۱ $$\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{\coth ax}{a} + C$$

۵۷۲ $$\int \operatorname{csch}^3 ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch} ax \coth ax}{2a} - \frac{1}{2a}\ln\tanh\frac{ax}{2} + C$$

۵۷۳ $$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C$$

۵۷۴ $$\int \frac{dx}{\operatorname{csch} ax} = \frac{1}{a}\cosh ax + C$$

۵۷۵ $$\int x \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\} + C$$

۵۷۶ $$\int x \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{x\coth ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\sinh ax + C$$

۵۷۷ $$\int \frac{\operatorname{csch} ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \cdots \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1)B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots + C$$

۵۷۸ $$\int \frac{dx}{q + p\operatorname{csch} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p + q\sinh ax} + C \quad \text{[See 14.553]}$$

۵۷۹ $$\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = \frac{-\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{a(n-1)} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx + C$$

انتگرالهایی که شامل توابع معکوس هیپربولیک باشند

۵۸۰ $$\int \sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\sinh^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

۵۹۶ $$\int x\sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)\sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{4} + C$$

۵۹۷ $$\int x^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(2a^2 - x^2)\sqrt{x^2 + a^2}}{9} + C$$

۵۹۸ $$\int \frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x}\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{(x/a)^3}{2\cdot3\cdot3} + \dfrac{1\cdot3(x/a)^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5} - \dfrac{1\cdot3\cdot5(x/a)^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7} + \cdots + c & |x| < a \\ \dfrac{\ln^2(2x/a)}{2} - \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} + \dfrac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} - \dfrac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} + \cdots + c & x > a \\ -\dfrac{\ln^2(-2x/a)}{2} + \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} - \dfrac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} + \dfrac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} - \cdots & x < -a \end{cases}$$

۵۹۹ $$\int \frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + c$$

۶۰۰ $$\int \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\cosh^{-1}(x/a) - \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ x\cosh^{-1}(x/a) + \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

۶۰۱ $$\int x\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) - \tfrac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \tfrac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

۶۰۲ $$\int x^2\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{3}x^3\cosh^{-1}(x/a) - \tfrac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \tfrac{1}{3}x^3\cosh^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

۶۰۳ $$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \pm\left[\frac{1}{2}\ln^2(2x/a) + \frac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} + \frac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} + \frac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} + \cdots\right] + c$$

$+$ if $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, $\quad -$ if $\cosh^{-1}(x/a) < 0$

۶۰۴ $$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x} \mp \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

[$-$ if $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, $\quad +$ if $\cosh^{-1}(x/a) < 0$]

۶۰۵ $$\int \tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2) + c$$

۶۰۶ $$\int x\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \tfrac{1}{2}(x^2-a^2)\tanh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

۶۰۷ $$\int x^2\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax^2}{6} + \frac{x^3}{3}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2-x^2) + c$$